Monsieur

Souvenir fraternel

ESSAI SUR LA THÉORIE

DES

PERTURBATIONS DES COMÈTES

PAR

EMILE GAUTIER,



GENÈVE,

IMPRIMERIE DE FERDINAND RAMBOZ,

RUE DE L'HÔTEL-DE-VILLE, 78.

—

1847



La Faculté des Sciences autorise l'impression de la présente dissertation, sans entendre énoncer aucune opinion sur les propositions qui y sont renfermées.

A. PASCALIS, doyen.

Genève, le 20 Juillet 1846.

AVANT-PROPOS.

A mesure que l'Astronomie, puisant de nouvelles lumières dans le perfectionnement de l'analyse et des observations, a progressé, en se maintenant au premier rang entre toutes les sciences, on a vu s'accroître infiniment l'importance des petites déviations produites sur les corps célestes, par les actions secondaires qui influent sur leur mouvement. C'est au moyen de faibles divergences, entre la théorie de la planète qu'on croyait la plus éloignée de toutes celles de notre système, et les observations, c'est-à-dire au moyen de perturbations dont la cause était jusqu'alors inconnue, qu'un géomètre éminent a prédit, dans le courant de cette année désormais célèbre dans les fastes de la science, la découverte d'un nouvel astre, encore placé sous la domination de notre Soleil, et cette découverte s'est admirablement réalisée. « L'étude et le calcul des *perturbations* qui sont, non comme on le disait autrefois, l'exception et le désordre, mais la loi générale et la règle, renferment, comme dans un germe fécond, tous les progrès futurs de l'astronomie, et les découvertes que nous réserve l'avenir. » Ce sont là les paroles du même savant, de M. Le Verrier, à l'ouverture de son nouveau cours de Mécanique Céleste à la Sorbonne —Ayant joui du privilége immense d'être initié par lui-même à ce genre de recherches, j'ai appris sous ses auspices, à apprécier tout l'intérêt qu'elles inspirent, toute l'attention qu'elles méritent. De retour dans notre cité, j'ai tenté de résumer dans cet *Essai* les travaux des géomètres-astronomes sur le mou-

vement troublé des *Comètes*. Je viens aujourd'hui le mettre sous les yeux de la Faculté des Sciences, heureux de pouvoir encore l'adresser à un Corps jouissant d'un lustre et d'une considération justement mérités, mais qu'un vandalisme révolutionnaire peut maintenant à tout instant bouleverser. — Près de voir achevée l'impression de mon travail, je me sens de plus en plus pénétré de l'extrême faiblesse de ma portée, comparée à celle des auteurs illustres que j'ai dû analyser, et j'éprouve un besoin pressant de le recommander à l'indulgence des juges chargés de l'examiner. C'est dans le double but d'invoquer leur bienveillance et de leur témoigner publiquement ma gratitude, que je joins ces lignes à mon Essai. Professeurs et docteurs de notre Académie, j'aurais à les nommer presque tous pour les remercier de leurs utiles directions, et je les prie d'accepter ici ensemble l'expression de ma reconnaissance et de mon attachement. Qu'il me soit permis de citer en outre M. le baron Maurice, dont la bienveillante amitié m'a constamment encouragé dans mes recherches et, encore une fois, M. Le Verrier, dont la réputation actuelle, si dignement acquise, me fait estimer bien haut la précieuse prérogative de pouvoir m'appeler son élève. Enfin, je manquerais au plus strict devoir, si je ne mentionnais pas aussi le rare avantage dont j'ai joui, en ayant dans mon oncle, M. Alfred Gautier, un guide sûr et un modèle que j'ai toujours eu devant les yeux dans le cours de mes études.

Émile Gautier.

29 *Décembre* 1846.

ESSAI

SUR LA

THÉORIE DES PERTURBATIONS DES COMÈTES.

CHAPITRE PREMIER.

Premiers Travaux des Géomètres sur ce sujet.

Avant la publication de l'immortel ouvrage des *Principes*, les opinions les plus étranges existaient sur la nature des Comètes : peu à peu la méthode d'observation venant à remplacer l'autorité toute-puissante de la physique d'Aristote et de l'astronomie de Ptolémée, avait fait faire des pas importants à leur théorie. Après qu'on les eût longtemps considérées comme des phénomènes sublunaires, Cardan qui vivait vers le milieu du seizième siècle, donna des notions plus correctes sur la mesure de la parallaxe des Comètes, et partant, de leur distance à la Terre; mais Newton le premier (1)

(1) Nous ne négligerons pas de rendre justice aussi à un ancien philosophe, L.-A. Sénèque, qui dans le VIIe livre de ses *Questions Naturelles*, consacré aux Comètes, fait preuve d'une perspicacité vraiment étonnante pour l'époque où il écrivait. Après avoir exposé et réfuté en grande partie les opinions des principaux chefs de la philosophie à l'égard des comètes, il déclare les classer parmi les astres d'une nature analogue à celle des planètes : Non enim existimo Cometen subitaneum ignem, sed inter æterna opera naturæ. Nullis ignibus ordinariis et celestibus iter flexum est. Sideris proprium est, ducere orbem. At qui hoc an Cometæ alii fecerint, nescio : duo nostra ætate fecerunt. — Il annonce ensuite que dans la suite des temps, on connaîtra mieux et leur constitution et leur mouvement : Erit qui demonstret aliquando, in quibus Cometæ partibus errent, cur tam seductis à ceteris eant, quanti qualesque sint, etc., etc. — On ne peut qu'admirer un témoignage aussi précis de la part d'un auteur contemporain de Néron.

assigna à ces astres, objets de tant d'hypothèses absurdes, la véritable place qu'ils occupent dans le système du monde et les assujettit aux lois données par Kepler pour le mouvement des planètes. Quoique dans cette explication gît la vérité, on sait que quelques astronomes, parmi les plus éminents, la repoussèrent. Jacques Cassini, encore en 1731, s'efforçait de la réfuter; plus tard cependant il ne put persévérer dans son opposition, et les idées newtoniennes l'emportèrent. Ce sont ces idées qui sont la base de toutes les recherches faites par les géomètres sur le sujet qui va nous occuper. L'époque de leur publication à la fin du dix-septième siècle, nous présente donc une date au delà de laquelle nous n'aurons pas à remonter : ne voulant même nous occuper ici que du mouvement troublé des Comètes, nous pourrons partir d'une époque encore postérieure.

Newton en effet assigne aux Comètes pour trajectoire, des sections coniques, ayant leurs foyers au centre du Soleil ([1]) ; il donne une méthode graphique pour calculer une orbite parabolique ([2]) ; mais ne connaissant aucun exemple du retour d'une Comète après une première apparition, il ne songe pas à s'occuper de l'influence des planètes sur leur mouvement. « Hinc *si* Cometæ in orbem redeunt, dit-il, orbes *erunt* ellipses et tempora periodica *erunt* ad tempora periodica planetarum in axium principalium ratione sesquiplicata. » — Dès qu'une orbite fermée aurait été assignée à un de ces astres mystérieux, on devait s'attendre à voir surgir la question de ses perturbations. C'est ce qui arriva, et ce fut Halley qui le premier s'en préoccupa, une fois qu'il eût reconnu et établi la périodicité de la fameuse Comète qui porte encore son nom.

Dès l'année 1705, cet habile astronome avait publié des recherches sur les Comètes, renfermant une table pour servir au calcul des éléments paraboliques, et l'application des méthodes de Newton à vingt-quatre Comètes. Trois d'entre elles, celles des années 1682, 1607 et 1531, lui fournissaient des orbites sensiblement analogues, et il publia en même temps son premier pressentiment sur leur similitude. La différence des périodes et des inclinaisons lui paraissait cependant encore trop grande pour oser prononcer sur l'identité. Il avertit toutefois les astronomes de la rechercher

([1]) Principia, lib. III, proposit. XL.
([2]) Ibid. proposit. XLI.

vers 1758. Plus tard, après de nouvelles recherches dans de plus anciens documents, il découvrit trois autres Comètes apparaissant à des intervalles à peu près égaux, dans les années 1456, 1380 et 1305. Cette circonstance le confirma singulièrement dans son premier sentiment, et il entreprit le calcul d'une orbite elliptique pour celle de 1682, dont les éléments concordèrent d'une manière satisfaisante avec les observations de Flamsteed. Il fit le même calcul pour la Comète de 1607 et trouva des éléments fort semblables à ceux de la précédente. « Les nœuds, nous dit-il ([1]), étaient moins avancés de 3° que ceux de la Comète de 1682 et le mouvement s'est fait suivant la suite des signes. Le mouvement du périhélie a été de 32′ 20″, mais la précession des équinoxes de 1° 2′ 30″. Donc à l'égard des étoiles, l'aphélie a rétrogradé d'un demi-degré et les nœuds ont avancé de 1° 57′. C'est le contraire dans les planètes, le mouvement de leur aphélie est direct et celui des nœuds est rétrograde, à cause des forces centripètes des corps célestes qui se mêlent à celle du Soleil et troublent son action. Mais cette Comète se trouve rétrograde, donc les mêmes causes doivent rendre son aphélie rétrograde et faire avancer ses nœuds suivant l'ordre des signes, c'est-à-dire toujours dans le sens opposé au mouvement de la Comète. »

C'est dans cette phrase de Halley qu'il est pour la première fois question de l'action troublante des planètes sur les Comètes. Il est encore plus explicite dans ce qui suit : il y est question de la différence d'inclinaison qui s'élève à 22′, et de l'inégalité des périodes qui dépasse une année. Pour expliquer une anomalie qui lui paraît aussi considérable, Halley s'appuie hardiment sur l'exemple que lui fournit l'action perturbatrice de Jupiter sur la période de Saturne qu'il augmente quelquefois de 13 jours, et fait voir comment, dans l'été de 1681, la Comète a pu être assez près de Jupiter pour en être attirée avec une force d'environ $^{1}/_{50}$ de celle qui porte la Comète vers le Soleil. Ce calcul tout approximatif, et pour lequel il suppose la masse de Jupiter un millième de celle du Soleil, l'amène à conclure que dans cet endroit « les arcs de l'orbite elliptique que la Comète aurait dû décrire reçurent une espèce de courbure hyperbolique tournée vers Jupiter et formèrent une courbe très-composée, dont la détermination surpasse

([1]) Voyez la *Théorie des Comètes de Halley*, dans la traduction française qu'en a faite Lalande en 1759, en publiant ses *Tables Astronomiques*.

quant à présent les forces de la géométrie, mais dans laquelle la direction et la vitesse ont dû être différentes de ce qu'elles auraient été dans l'ellipse. » Il croit pouvoir rendre compte par là du changement d'inclinaison ainsi que de l'augmentation de la vitesse propre, et il prévoit que cette vitesse pourra ne pas être aussi grande lors de la prochaine apparition de la Comète et ne la ramener que vers la fin de 1758 ou le commencement de 1759. « Mais tout ceci, dit-il encore, n'est qu'un léger essai : nous laissons le soin d'approfondir cette matière à ceux qui nous suivront, lorsque l'événement aura justifié nos prédictions. »

Déjà avant cette époque, l'analyse ayant fait de grands progrès entre les mains de Clairaut, d'Alembert et Euler, on s'occupa d'avance à calculer les perturbations de la Comète de Halley. C'était la théorie de la Lune qui avait la première, en raison de son importance, nécessité des recherches sur la solution du problème des trois corps, et on sait que ces trois illustres géomètres dès l'année 1745 s'occupèrent de cette théorie, d'abord avec un insuccès qui les porta à révoquer en doute la loi d'attraction newtonienne, puis de manière à mettre les observations en accord satisfaisant avec cette base admirable du système du monde. Il s'agissait maintenant d'appliquer à la Comète en question les formules générales auxquelles ils étaient parvenus; mais cette nouvelle application se trouvait présenter des difficultés de plus d'un genre. En effet, tant qu'il s'était agi de planètes ou de satellites dont les orbites sont généralement peu excentriques, les coordonnées des différents corps agissant les uns sur les autres se laissaient exprimer par des expressions analytiques peu complexes. Dans le cas des Comètes, en raison des variations considérables que subissent leurs distances au centre du mouvement et aux planètes perturbatrices, à cause aussi de la grandeur de leurs inclinaisons, on doit renoncer à arriver à une expression analytique qui n'ait besoin que de quelques substitutions numériques pour donner le résultat, ainsi que dans les cas précédemment traités.

Clairaut, qui le premier entreprit le calcul de l'orbite troublée de la Comète de Halley, se rendit bien compte de ces écueils, et désirant donner son résultat avant la nouvelle apparition de 1759, il prit une route laborieuse mais sûre, et se servit de formules de sa solution du problème des trois corps au moyen desquelles, étant données les positions respectives

de la Comète et de la planète pendant une suite de points pris à de petites distances les uns des autres, il était en état par la quadrature de quelques courbes mécaniques, de rectifier la position de ces mêmes points et de mesurer toute la perturbation. Clairaut s'aperçut bientôt qu'il aurait à tenir compte, non-seulement de l'action de Jupiter pendant le temps où la Comète s'en trouvait rapprochée, mais encore pendant toute sa révolution, et en outre de celle de Saturne dont la masse, qui est le tiers environ de celle de Jupiter, peut produire, toutes choses égales d'ailleurs, le tiers des effets de la première. Il eut recours à l'aide de Lalande, dans ces calculs d'un genre tout nouveau pour les astronomes, et il donne ses résultats dans sa *Théorie du Mouvement des Comètes*, publiée en 1760, en y joignant les méthodes particulières qu'il a découvertes sur son chemin et qui lui ont fourni des procédés donnant lieu à des abréviations considérables. C'est de cet ouvrage que nous allons rendre un compte succinct, car nous y trouverons le germe de plusieurs théorèmes importants, que les successeurs de l'auteur dans l'analyse n'ont eu le plus souvent qu'à développer, pour en tirer les perfectionnements qu'a subis dans la suite la théorie des perturbations des comètes.

La première chose à faire pour calculer les altérations des orbites des Comètes dues à l'attraction des planètes, c'est de trouver l'expression des forces qui troublent leur mouvement. Supposant une planète quelconque en J (figure 1), la Comète en C, qui décrit son orbite EPD autour du Soleil S, et projetant la planète en j sur le plan de cette orbite ; l'attraction de la planète sur la Comète et sur le Soleil, se décomposera en trois forces :

$$J.\,Jj\left(\frac{1}{JC^3}-\frac{1}{JS^3}\right)$$

qui écarte la comète du plan de son orbite, la lettre J représentant la masse de la planète troublante. En second lieu, la force

$$-\pi = J.\,jN\left(\frac{1}{JC^3}-\frac{1}{JS^3}\right)$$

tirant la Comète dans la direction perpendiculaire au rayon vecteur : elle est affectée du signe — parce qu'elle est supposée prise en sens contraire du mouvement de la Comète ; et enfin :

$$\varphi = \frac{J.SN}{\overline{JS}^3} + \frac{J.CN}{\overline{JC}^3},$$

qui exprime la force totale avec laquelle la planète tire la Comète vers le Soleil.

Dès cette première section, Clairaut fait d'importantes observations sur la manière de calculer les perturbations dans les différentes parties de l'orbite. Lorsque la Comète sera dans les régions fort éloignées du Soleil, et par conséquent de la planète perturbatrice, on pourra sans erreur considérable négliger l'action directe qu'elle reçoit de la planète et n'avoir égard qu'à la force sur le Soleil. Alors les forces perturbatrices sont :

$$\pi = \frac{J.jN}{\overline{JS}^3}, \qquad \varphi = \frac{J.SN}{\overline{JS}^3}.$$

Si on veut pousser l'exactitude jusqu'à ne pas négliger le dérangement que peut produire l'action directe de la planète sur la Comète, on pourrait, après avoir calculé la perturbation qui vient de l'action sur le Soleil, traiter celle de l'action directe sur la Comète, en prenant alors pour les forces perturbatrices :

$$\pi = -\frac{J.jN}{\overline{JC}^3}, \qquad \varphi = \frac{J.CN}{\overline{JC}^3}.$$

Cette décomposition des forces troublantes facilite et abrége beaucoup les calculs et est permise, en tant qu'on peut sans inconvénient négliger leurs secondes puissances. Par la même raison, on pourra calculer les droites JC, CS, etc., en se servant comme trajectoire, de l'ellipse dont les éléments sont donnés par l'observation.

En raison de la forme ordinairement très-allongée de cette ellipse, ses arcs variant très-différemment pour des accroissements égaux d'anomalie vraie, Clairaut adopte pour argument général de toutes les quantités l'anomalie excentrique pour laquelle cette irrégularité est moins sensible, et il indique les transformations que subissent, en vertu de ce changement, les équations de sa solution générale du problème des trois corps. Dans sa théorie de la Lune, il donne pour expressions des coordonnées troublées du mobile :

$$r = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos. v + \sin. v \int \Omega \cos. v \, dv - \cos. v \int \Omega \sin. v \, dv}.$$

et

$$z = \int \frac{r^2 dv}{\sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 + 2\rho}},$$

où r est le rayon vecteur, v l'anomalie vraie, z l'anomalie moyenne, e l'excentricité, et où le grand axe est supposé égal à l'unité. La force totale qui pousse le mobile vers le centre est $\frac{M}{r^2} + \varphi$, M représentant la somme des masses du Soleil et de la planète; celle qui agit perpendiculairement au rayon vecteur est π. On a posé de plus :

$$\rho = \int \frac{\pi r^3 dv}{M(1 - e^2)} \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{\frac{\varphi r^2}{M} + \frac{\pi r \, dr}{M \, dv} - 2\rho}{1 + 2\rho}.$$

Ces équations sont démontrées dans les *Mémoires de l'Académie de Paris*, année 1748. (Voyez aussi *Dissertation Astronomique*, par A. Gautier, page 103.)

Dans le cas où on néglige les termes de l'ordre φ^2 et π^2, ce qui est permis quand on ne considère que peu de révolutions consécutives, la valeur de Ω sera exprimée avec une exactitude suffisante par

$$\Omega = \frac{\varphi r^2}{M} + \frac{\pi r \, dr}{M \, dv} - 2\rho.$$

Appelant $\overline{r}$ le rayon vecteur de l'ellipse non altérée qui vaut $\frac{1 - e^2}{1 + e \cos. v}$, et désignant par ξ la correction à faire à la valeur de cette expression,

$$\xi = \frac{\overline{r} \cos. v}{1 - e^2} \int \Omega \, dv \sin. v - \frac{\overline{r} \sin. v}{1 - e^2} \int \Omega \, dv \cos. v,$$

et le rayon vrai sera égal à

$$r = \overline{r} (1 + \xi).$$

Pour le moyen mouvement, sa valeur dans la même supposition serait exprimée par

$$z = \bar{z} + \int \frac{r^2\, dv\, (2\,\xi - \rho)}{\sqrt{1-e^2}}\,,$$

$\bar{z}$ désignant le moyen mouvement dans l'ellipse non troublée.

Si au lieu de v nous introduisons comme variable l'anomalie excentrique x, on sait que dans l'ellipse primitive :

$$\bar{r} = 1 - e \cos.\, x \quad ; \quad \bar{z} = \int \frac{r^2\, dv}{\sqrt{1-e^2}} = \int r\, dx = x - e \sin.\, x.$$

Dans l'ellipse troublée, nous aurons :

$$r = \bar{r}(1+\xi) \quad ; \quad z = \bar{z} + 2 \int \xi\, \bar{r}\, dx - \int \rho\, \bar{r}\, dx,$$

et supposant que

$$\rho = \int \frac{\pi\, r^2\, dx}{\text{M}.\sqrt{1-e^2}} \quad ; \quad \omega = \frac{\varphi}{\text{M}} + \frac{\pi\, e \sin.\, x}{\text{M}\sqrt{1-e^2}} - \frac{2\,\rho}{r^2} = \frac{\Omega}{r^2}\,;$$

$$\text{P} = \int \omega.\, dx.\, \sin.\, x \quad ; \quad \text{Q} = \int \omega\, dx\, (\cos.\, x - e);$$

on aura :

$$\xi = \text{P}\,(\cos.\, x - e) - \text{Q} \sin.\, x.$$

Ces formules suffisent, les éléments de l'orbite elliptique étant donnés, pour obtenir la perturbation pour toute la révolution. Voici le procédé usité par Clairaut. Il fait d'abord une table des valeurs de log. r., log. $(\cos.\, x - e)$, log. $\dfrac{e \sin.\, x}{\sqrt{1-e^2}}$ pour chaque degré d'anomalie excentrique, puis il calcule pour les mêmes points les valeurs de φ et de π. Au moyen de la table précédente il calcule ρ ou $\displaystyle\int \frac{r^2\, \pi\, dx}{\sqrt{1-e^2}}$, ce qui s'exécute par quadratures. Il considère cette courbe comme un assemblage de lignes droites dont les ordonnées sont $\dfrac{\pi\, r^2}{\sqrt{1-e^2}}$; l'intervalle choisi entre les ordonnées étant une droite égale à l'arc de 1° pour le rayon 1, chaque aire vaudra $\dfrac{\pi\, r^2 .\, 1^\circ}{\sqrt{1-e^2}}$. Ensuite il retranche de chaque aire rectiligne $^1/_{12}$

de la somme des secondes différences, ajoute $^1/_{24}$ de la somme des troisièmes, retranche les $^{19}/_{720}$ de la somme des quatrièmes, et ainsi de suite. Généralement il suffira d'avoir égard aux secondes différences.

Ayant ainsi obtenu les quantités ρ, il forme $\frac{2\rho}{r^2}$, puis au moyen des $\log. \frac{e \sin. x}{\sqrt{1-e^2}}$ et des $\log. \pi$, il forme la suite des $\frac{\pi e \sin. x}{\sqrt{1-e^2}}$. Joignant alors les trois parties $\varphi + \frac{\pi e \sin. x}{\sqrt{1-e^2}} - \frac{2\rho}{r^2}$, on a la suite des ω, avec laquelle il est aisé, par la méthode des quadratures qu'on vient d'employer pour ρ, de former

$$P = \int \omega.\, dx \sin. x \quad \text{et} \quad Q = \int \omega (\cos. x - e)\, dx,$$

d'où l'on tirera

$$\xi = P(\cos. x - e) - Q \sin. x,$$

et partant,

$$z = \bar{z} + 2\int \xi \bar{r}\, dx - \int \rho \bar{r}\, dx;$$

c'est-à-dire le moyen mouvement de la Comète pour un arc quelconque répondant à l'anomalie vraie v, ou à l'anomalie excentrique x.

On voit bien que la méthode précédente est complète et suffisante pour le calcul des perturbations pendant toute la révolution : il suffit pour cela de faire varier les abscisses des courbes qu'il faut quarrer, depuis $x = 0°$, jusqu'à $x = 360°$. Mais de grandes simplifications se présentent dans le cours du calcul, surtout pour celui qui a rapport à la partie supérieure de l'orbite.

On a vu, page 6, ce que deviennent les forces perturbatrices, si on néglige l'action immédiate de la planète sur la Comète, et qu'on ne considère que son action sur le Soleil. Ces forces peuvent aussi s'écrire, si on appelle t la commutation raccourcie des deux astres, c'est-à-dire (figure 1) l'angle jSC :

$$\varphi = \frac{J.\, Sj.\, \cos. t.}{\overline{JS}^3}, \qquad \pi = \frac{J.\, Sj.\, \sin. t}{\overline{JS}^3}.$$

Ces valeurs, quoique beaucoup plus simples que celles qui expriment les forces perturbatrices réelles, demanderaient encore la résolution d'équations très-compliquées, si on se servait de la méthode générale. Clairaut indique un expédient au moyen duquel on évite de résoudre toutes ces équations. Il consiste à supposer la Comète se mouvant dans l'espace absolu, en décrivant une trajectoire qui, en raison de l'attraction de la planète sur le Soleil, n'a plus pour foyer un point fixe, mais bien successivement les points S d'une petite ellipse SKL (figure 2), que parcourt le Soleil autour du centre de gravité de la somme de sa masse et de celle de la planète troublante. Or, dans la partie supérieure de l'orbite, la trajectoire considérée comme décrite dans l'espace absolu, pourra être prise pour une ellipse dont les dimensions sont fort aisées à trouver, et l'orbite dont nous avons besoin dans l'espace relatif devra être telle, qu'elle paraisse cette même ellipse pour un spectateur, qui serait supposé se mouvoir dans la petite orbite décrite par le centre de gravité du Soleil et de la planète.— Clairaut fait comprendre sa méthode par l'exposé d'une construction géométrique, qu'il développe ensuite analytiquement pour en conclure la véritable trajectoire de la Comète dans la partie supérieure de son orbite. Nous verrons plus tard que les géomètres modernes ont aussi employé le même procédé et nous donnerons leurs formules, qui sont plus simples que celles de Clairaut et plus applicables. Remarquons encore qu'il donne en même temps les procédés nécessaires pour passer d'un mode de calcul à un autre, c'est-à-dire pour déterminer l'ellipse que parcourrait la Comète à partir d'un certain point, d'où l'on commencerait à négliger les forces perturbatrices ou à en tenir compte d'une autre manière.

Le calcul des perturbations produites par l'action directe de la planète sur la Comète, et résultant des forces

$$\varphi = \frac{J.CN}{JC^3} \quad \text{et} \quad \pi = \frac{J.jN}{JC^3} \quad \text{(page 6)},$$

pourrait s'exécuter par la méthode générale. Clairaut l'abrége en se servant, au lieu de l'anomalie excentrique, du supplément de l'anomalie vraie, qui, en raison de l'allongement de l'orbite, est un angle toujours peu considérable au delà des deux extrémités du petit axe, et dont les lignes trigonométriques pourront se remplacer par les séries connues où l'on ne con-

servera que les troisièmes puissances de l'angle. On aura toujours besoin de recourir aux quadratures, mais cette opération demandera moins de scrupule.

Pour le dernier quart de l'orbite, l'auteur indique aussi un changement d'argument avantageux pour le calcul, consistant à compter l'anomalie excentrique dans une direction opposée à celle du mouvement de la Comète. En effet dans cette portion de la trajectoire, les plus grandes valeurs de ρ se trouvant alors vers le périhélie, où les rayons vecteurs sont extrêmement petits, le terme $\frac{2\rho}{r^2}$ qui entre dans la valeur de ω devient très-considérable et produit de grands sauts dans la progression des ω, à moins qu'en déterminant les ρ, on n'ait mis beaucoup plus de rigueur dans les calculs des derniers degrés que dans ceux des premiers.

L'exposé de ces diverses méthodes et d'une dernière, applicable au cas où la planète est supposée décrire un cercle autour du Soleil, et où on s'occupe seulement des perturbations résultant de son action sur le Soleil, compose la première partie de l'ouvrage de Clairaut. La seconde partie renferme leur application aux révolutions de la Comète de Halley, en remontant jusqu'à celle de 1531 à 1607, avec tous les détails d'un calcul qui s'exécutait pour la première fois et qui exigea de la part de ses auteurs un courage et une patience extraordinaires. Il s'occupe exclusivement dans ces deux premières parties de l'altération du temps périodique de la Comète, afin de pouvoir annoncer l'époque de son prochain retour en 1759; elles furent composées avant cet événement: la troisième seule, sur laquelle il nous reste à dire quelques mots, le fut après l'apparition de la Comète; elle traite des variations des autres éléments des orbites des Comètes, c'est-à-dire des variations de la position du périhélie, de l'inclinaison de l'orbite et de ses nœuds.

Lorsque la Comète est revenue dans le même rayon vecteur où elle était au périhélie de l'apparition précédente, elle ne coupe plus ce rayon ni au même point, ni sous le même angle, ni avec la même vitesse. C'est du changement de ces trois quantités que doit résulter ce qui constitue la position du nouveau périhélie. La variation du rayon vecteur est la quantité $\bar{r}\xi$, répondant à l'anomalie excentrique de 360°. — La tangente de l'angle

compris entre le rayon et la perpendiculaire à l'orbite est $\frac{dr}{r\,dv}$, ou chassant les différentielles en raison de la valeur de r (page 7) :

$$\frac{dr}{r\,dv} = \frac{e \sin. x}{\sqrt{1-e^2}} - \frac{\bar{r}(\mathrm{P} \sin. x + \mathrm{Q} \cos. x)}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Pour trouver l'angle en question, on commencera par chercher celui qui aurait lieu dans l'ellipse primitive à la même anomalie excentrique, on fera à la tangente de cet angle la correction $-\frac{(\mathrm{P} \sin. x + \mathrm{Q} \cos. x) r}{\sqrt{1-e^2}}$, et on prendra l'angle répondant à cette nouvelle tangente. — Mais la correction d'une tangente, lorsqu'elle est très-petite, peut devenir celle de l'angle même, en la divisant par le carré du cosinus de cet angle. Donc on pourra exprimer directement la correction de l'angle cherché par la formule :

$$-\frac{(\mathrm{P} \sin. x + \mathrm{Q} \cos. x) . \sqrt{1-e^2}}{1 + e \cos. x}.$$

Au changement de la vitesse, nous substituerons celui du grand axe de l'ellipse que la Comète est prête à décrire avec la nouvelle vitesse. Ces deux variations sont liées par la relation :

$$\chi = \frac{2\,dr}{r^2} + 2\,\mathrm{V} . d\,\mathrm{V},$$

à cause de l'équation du mouvement elliptique :

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \mathrm{V}^2,$$

en représentant par χ la correction à faire au demi-grand axe a de l'ellipse primitive, et par V la vitesse du mobile. Cette altération se met sous la forme, [1]

$$\chi = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{\mathrm{M}} \int \pi\, dx - \frac{2\,e}{\mathrm{M}} . \int \varphi\, dx \sin. x.$$

[1] Voir la NOTE I.

qui peut s'écrire ([1]):

$$\chi = \frac{4 - 2\overline{r}}{\overline{r}} . \rho - 2e\mathrm{P}.$$

Cela posé, au moyen d'un lemme très-simple ([2]), qui donne la variation de la base et des angles à la base d'un triangle dont on altère les côtés et l'angle compris, on obtiendra facilement la détermination du périhélie après un temps quelconque.

PC représentant l'orbite réelle (figure 3), P son périhélie ainsi que celui de l'ellipse primitive, P'C l'ellipse qui aurait lieu si les forces perturbatri-

([1]) En effet, si nous prenons la valeur de $\mathrm{P} = e\int \omega\, dx \sin. x$.

A cause de la forme de ω (page 8):

$$\omega\, dx \sin. x = \frac{\varphi\, dx \sin. x}{\mathrm{M}} + \frac{\pi e\, dx \sin.^2 x}{\mathrm{M}\sqrt{1-e^2}} - \frac{2\, dx \sin. x}{r^2 \mathrm{M}\sqrt{1-e^2}} \int \pi r^2\, dx;$$

intégrant, et à cause de $dr = e\, dx \sin. x$:

$$\int \omega\, dx \sin. x = \int \frac{\varphi\, dx \sin. x}{\mathrm{M}} + \int \frac{\pi e\, dx \sin.^2 x}{\mathrm{M}\sqrt{1-e^2}} + \frac{2}{er}\int \frac{\pi r^2\, dx}{\mathrm{M}\sqrt{1-e^2}} - \frac{2}{e}\int \frac{\mathrm{M}\pi r\, dx}{\mathrm{M}\sqrt{1-e^2}},$$

ou

$$\int \omega\, dx \sin. x = \int \frac{\varphi\, dx \sin. x}{\mathrm{M}} + \frac{2}{er}\int \frac{\pi r^2\, dx}{\mathrm{M}\sqrt{1-e^2}} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\mathrm{M}}\int \pi\, dx - \int \frac{\pi r^2\, dx}{e\mathrm{M}\sqrt{1-e^2}};$$

on obtient:

$$-2e\int \omega\, dx \sin. x + \frac{4-2r}{r}\int \frac{\pi r^2\, dx}{\mathrm{M}\sqrt{1-e^2}} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{\mathrm{M}}\int \pi\, dx - \frac{2e}{\mathrm{M}}\int \varphi\, dx \sin. x$$

ou

$$\frac{4-2r}{r} . \rho - 2e\mathrm{P} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{\mathrm{M}}\int \pi\, dx - \frac{2e}{\mathrm{M}}\int \varphi\, dx \sin. x.$$

q. e. d.

([2]) Lemme. Si l'on fait à l'angle C et aux côtés CS et CF (figure 4) les corrections $d\mathrm{C}$, $d.\mathrm{CS}$, $d.\mathrm{CF}$, la correction qui en résultera pour l'angle S sera:

$$d.\mathrm{S} = \frac{\mathrm{CF} \cos. \mathrm{F}.\, d\mathrm{C} - \sin. \mathrm{F}.\, d\mathrm{CF} + \sin. \mathrm{S}.\, d\mathrm{CS}}{\mathrm{SF}}$$

et celle de la base:

$$d.\,\mathrm{SF} = \mathrm{CF} \sin. \mathrm{F}.\, d\mathrm{C} + \cos. \mathrm{F}.\, d\mathrm{CF}. - \cos. \mathrm{S}.\, d\mathrm{CS}.$$

ces cessaient en C, F le second foyer de cette ellipse : la question est réduite à trouver la différence de grandeur et de position qui est entre la première distance périhélie SP et la seconde SP′.

Pour cela on substituera dans les formules du lemme indiqué, à la place de dC le double de la correction obtenue plus haut de l'angle compris entre le rayon vecteur et la normale, à la place de d. CS sa valeur $r\xi$, et à la place de d. CF la valeur $2\chi - r\xi$ résultant de la correction du grand axe et de celle de CS.

On aura ainsi pour dS l'expression :

$$-\left(Q + \frac{2\rho \sin. x}{r}\right)\frac{\sqrt{1-e^2}}{e},$$

qui exprime le mouvement du périhélie, et pour d. SF :

$$(1-e)^2 P + \frac{(1-\cos. x)}{r}\, 2\rho(1-e),$$

qui donne la variation de la distance périhélie. Ces deux expressions ne renferment que des quantités qui ont déjà été calculées dans la recherche de la perturbation du temps périodique de la Comète.

Les variations que l'attraction des planètes cause aux nœuds et aux inclinaisons des orbites des Comètes, se calculeront d'abord relativement au plan de l'orbite de chaque planète troublante ; on rapporte ensuite ces mouvements à l'écliptique. L'auteur donne pour les déterminer, d'abord une construction graphique, qu'il réduit ensuite en formule. Nous ne nous arrêterons pas à en rendre compte ; cela ne pourrait se faire sans entrer dans des détails assez étendus, qui seraient en dehors des limites de notre travail et qui auraient peu d'utilité, vu qu'on a aujourd'hui pour exprimer ces variations des méthodes beaucoup plus simples.

Clairaut donne dans sa troisième partie les calculs des variations de ces différents éléments pour la Comète de Halley, mais le plus important de ces résultats était celui qui concernait le retour de l'astre attendu avec tant d'impatience par tous les observateurs et relaté dans la deuxième partie. Après avoir revu avec tout le soin possible cette partie capitale de son travail, notre éminent géomètre annonça le nouveau passage au périhélie pour le milieu du mois d'avril 1759. Le 14 novembre 1758, il fit part de ce résultat à l'Académie des sciences de Paris, non sans une certaine appréhension, et en avertissant que, vu les quantités négligées nécessaire-

ment par les méthodes d'approximation, vu les causes inconnues qui peuvent agir sur la Comète [1], il ne pouvait en garantir l'exactitude qu'à un mois près. Cette restriction accompagnant la publication d'un travail aussi considérable, devait faire pardonner à son auteur toute divergence d'avec la réalité en dedans des limites indiquées. En effet, tout calculateur qui prévoit et annonce la quantité dont il peut s'être trompé, ne doit point être chargé de cette erreur, quelque considérable qu'elle puisse être. Cependant la Comète ayant été aperçue dès la fin de 1758, et le calcul des éléments de sa nouvelle orbite lui ayant assigné pour nouvelle époque de son passage au périhélie le 12 mars 1759, 33 jours plus tôt que l'instant prédit par Clairaut, cette différence fut l'objet d'une discussion très-animée parmi les mathématiciens. Trop de confiance dans ses résultats d'une part, chez des astronomes qui s'en rapportèrent à eux plus servilement que leur auteur lui-même ne l'avait demandé, et calculèrent, en les prenant pour base, des éphémérides qui se trouvèrent de 40 à 50 degrés en erreur; l'animosité de l'autre, firent dégénérer cette question en une querelle véritable. D'Alembert la résume dans le tome II de ses *Opuscules* (page 237), et quoique certes, il ne puisse être suspecté de partialité envers le géomètre qui fut son rival pendant un certain temps, il conclut « que l'erreur, quelque considérable qu'elle soit, doit être imputée uniquement à la nature du problème; puisque d'une part il n'est peut-être pas possible (sans s'engager dans des calculs impraticables) de déterminer l'altération plus exactement, et puisque d'un autre côté on doit se proposer dans ces sortes de calculs, non de prédire exactement le retour d'une Comète de manière qu'on puisse avoir son lieu dans le ciel à 30, 40 ou 50 degrés près, mais seulement de prouver que, par la théorie de la gravitation, l'action de Jupiter et de Saturne doit altérer considérablement le cours de ces astres; et c'est ce que M. Clairaut a suffisamment démontré par son travail. »

Ces lignes terminent le treizième mémoire contenu dans les *Opuscules mathématiques*, sous le titre de *Réflexions sur la Comète de 1682 et 1759*, (pages 96 à 217). Le douzième mémoire est entièrement consacré à la *Théorie des Comètes*, et c'est de lui que nous allons nous occuper.

[1] Parmi ces causes inconnues nous pouvons ranger l'influence Uranus, dont personne ne soupçonnait alors l'existence, et qui, si l'on en avait tenu compte, aurait fort diminué l'erreur de l'admirable travail de Clairaut.

D'Alembert dans cet écrit, commence par montrer que la théorie des perturbations des Comètes est contenue dans la solution qu'il avait donnée dès 1747 du problème des trois corps ; tout ceci était à l'adresse de Clairaut. Ce dernier avait prétendu, que sept ans avant que personne en eût donné de pareille, il avait publié une formule par laquelle, lorsqu'on connaît à peu près les positions respectives de la Comète et de la planète perturbatrice, pendant une suite de points pris à de petites distances les uns des autres, on est en état, par la quadrature de quelques courbes mécaniques, de rectifier la position de ces mêmes points et de mesurer toute la perturbation. D'Alembert prouve que ses formules, contenues dans les mémoires de l'Académie pour 1745, s'adaptent également bien à un semblable calcul ; et il déduit en effet de ces formules des expressions du rayon et du moyen mouvement dans l'ellipse troublée, qui sont fonctions des mêmes forces troublantes φ et π que celles de Clairaut, qui renferment pour argument général l'anomalie moyenne, et qui par les quadratures pourront également fournir le moyen de calculer les perturbations des Comètes. Mais il convient lui-même que ces opérations seraient si multipliées et si compliquées, qu'il est nécessaire de chercher des méthodes pour abréger le calcul. Voici celle qu'indique d'Alembert comme la plus propre à rendre le calcul possible dans certaines occasions, plus exact et plus court dans tous les cas.

Si l'on considère le Soleil S et une planète perturbatrice J, décrivant autour de S une ellipse dans un plan différent si l'on veut, de celui de l'orbite de la Comète : il s'ensuit que le centre commun de gravité G des corps S et J, décrira pareillement une ellipse autour de S, regardé comme immobile, et cela dans le même temps que la planète J emploie à parcourir sa trajectoire autour du même point. Or le point G est attiré vers S par une force égale à celle qui attire le corps J, c'est-à-dire $\frac{S+J}{\overline{JS}^2}$, multipliée par $\frac{GS}{JS}$; et à cause de $\frac{GS}{JS} = \frac{J}{S+J}$, on peut mettre cette force sous la forme

$$\frac{S+J}{\overline{GS}^2} \cdot \frac{J^2}{(S+J)^2} \cdot \frac{J}{(S+J)} = \frac{J}{\overline{GS}^2} \cdot \frac{J^2}{(S+J^2)} .$$

Donc la force attractive du point G est en raison inverse du carré de la

distance GS, et par conséquent il se meut dans son ellipse autour de S comme s'il la décrivait, non d'un mouvement forcé, mais d'un mouvement libre.

Tandis que la Comète C (figure 5) se meut autour du Soleil dans son orbite telle qu'elle est, on peut supposer ou imaginer un point γ, qui étant poussé vers la Comète par une force réciproquement proportionnelle au carré de la distance, décrive autour de cette Comète, comme une espèce de satellite, une ellipse égale et semblable à l'ellipse décrite par le point G autour de S. La position du satellite imaginaire γ étant une fois déterminée pour un instant quelconque, il sera toujours facile d'en déduire celle de la Comète, qui est le centre de son mouvement. Il faut seulement bien remarquer que dans cette supposition, la force qui fera tendre continuellement le point γ vers C, et qui sera égale à $\frac{J}{\overline{C\gamma}^2} \cdot \frac{J^2}{(J+S)^2}$, ne viendra point de l'attraction de la masse C; ce sera une force absolument étrangère à la gravitation, mais dont il est permis de supposer l'existence dans une hypothèse purement mathématique, comme l'est celle que nous faisons ici. Il faut remarquer en outre que le point γ, en décrivant autour du point C l'ellipse dont il s'agit, participe nécessairement à tous les mouvements du point C dans l'espace absolu : ainsi ce point γ est animé par des forces égales et parallèles à celles qui agissent sur la Comète C.

Les forces qui animent le point γ, considéré comme se mouvant dans l'espace absolu, sont :

1° La force vers $C = \frac{J}{\overline{GS}^2} \cdot \frac{J^2}{(J+S)^2}$, ou, comme $GS = \frac{JS.J}{J+S}$, une force suivant $\gamma C = \frac{J}{\overline{JS}^2}$.

2° Une force suivant γL, égale et dans la même direction que la force $\frac{J}{\overline{JS}^2}$, qui agit sur la Comète C suivant CL parallèle à JS, et en sens contraire de l'action de la planète sur le Soleil.

3° Une force suivant $\gamma\Gamma$, parallèle à CS et égale à $\frac{S+C}{\overline{SC}^2}$ ou $\frac{S+C}{\overline{\gamma\Gamma}^2}$.

4° Une force suivant γi, parallèle à CJ et égale à $\frac{J}{\overline{JC}^2}$ ou $\frac{J}{\overline{\gamma i}^2}$.

Les deux premières de ces forces se détruisent. La troisième se change en deux autres : l'une suivant $\gamma S = \frac{(S+C)\,\gamma S}{\overline{\gamma\Gamma}^3}$, et l'autre suivant $\gamma L = \frac{(S+C)\,S\Gamma}{\overline{\gamma\Gamma}^3} = \frac{(S+C).\,C\gamma}{\overline{\gamma\Gamma}^3}$. La quatrième agissant suivant γi, se transforme aussi en deux autres : l'une suivant $\gamma C = \frac{J}{\overline{\gamma i}^2} \cdot \frac{iS}{\gamma i} = \frac{J.\,iS}{\overline{\gamma i}^3}$, et l'autre suivant $\gamma S = \frac{J.\,S\gamma}{\overline{\gamma i}^3}$. — C'est sous l'influence de ces quatre nouvelles composantes que le point γ est supposé se mouvoir dans l'espace absolu autour de S qui est supposé fixe. Lorsque la Comète se trouve dans les régions supérieures de son orbite, la distance $S\gamma$ devient fort grande par rapport à Si, et à plus forte raison par rapport à SG ou $C\gamma$; les forces qui précèdent peuvent se mettre sous des formes différentes, et en les combinant on trouve qu'un grand nombre d'entre elles se détruisent. *Le point γ reste attiré vers* S *par une force unique* $\frac{S+C+J}{\overline{S\gamma}^2}$, *sans aucune action perturbatrice sensible.* Dans toute la partie supérieure de l'orbite, on n'aura donc qu'à chercher l'ellipse décrite autour de S par le satellite γ, en vertu de la force attractive $\frac{S+C+J}{\overline{S\gamma}^2}$. Par chacun des points de cette ellipse, on mènera une ligne γC parallèle à JS et égale à $\frac{J.\,JS}{S+J}$, et on aura ainsi le lieu C de la Comète.

Ce procédé simplifie considérablement le calcul des perturbations d'une Comète, étant applicable à la portion de son orbite où ses positions sont connues le moins exactement, et où il est par conséquent le plus difficile de les comparer à celles de la planète troublante. Sa vitesse étant aussi la moins considérable dans ces régions, le calcul entrepris par ce moyen embrasse un espace de temps beaucoup plus grand que celui où l'astre se rapprochant du Soleil, acquiert un mouvement beaucoup plus rapide. Dans la partie in-

férieure de l'orbite seule, on devra recourir aux quadratures. Mais d'Alembert simplifie encore leur application, pour les Comètes qui ont une distance périhélie moindre que le rayon vecteur moyen de la planète perturbatrice, projeté sur le plan de l'orbite de la Comète.—Nous ne nous arrêterons pas à ces simplifications, qui ne sont plus employées à l'heure qu'il est.

D'Alembert envoya son mémoire à l'Académie de St.-Pétersbourg, qui avait proposé la théorie du mouvement troublé des Comètes et son application à celle de 1759, pour sujet du prix qu'elle devait distribuer en 1761. Son travail ne renfermait point la dernière partie du programme exigé; Clairaut composa pour ce concours un abrégé de sa *Théorie* etc., auquel il joignit ses principaux résultats numériques, et il fut couronné en 1762. Depuis cette date jusqu'en l'année 1778, où l'Académie des Sciences de Paris proposa de nouveau pour sujet de prix le calcul du dérangement d'une Comète passant près d'une planète, nous n'avons à signaler aucun mémoire sur ce sujet. A cette époque seulement, Fuss de l'Académie de St.-Pétersbourg, élève du grand Euler, envoya une pièce qui fut couronnée, mais qui ne satisfit pas entièrement ses juges, puisque la même question fut proposée encore pour l'année 1780.

Fuss remarquant qu'il est impossible de se servir dans le cas des Comètes, de la méthode qu'on suit ordinairement pour le calcul de l'action mutuelle des planètes, vu l'impossibilité de transformer la formule irrationnelle qui exprime la distance des deux astres en une série convergente dont il suffirait de prendre quelques termes, partage tout le temps où la Comète reste assujettie à l'action d'une planète perturbatrice en plusieurs intervalles, pour chacun desquels il calcule l'effet que soit l'action du Soleil soit celle de la planète y produisent. La combinaison de ces deux effets fera connaître l'état réel de la Comète à la fin de chaque intervalle, et donnera ainsi l'état initial pour l'intervalle de temps suivant. Tout reviendra donc à résoudre la question : l'état de la Comète étant donné pour le commencement d'un intervalle, déterminer son état pour la fin de ce même intervalle? et on n'aura qu'à assembler tous les changements qu'aura produits tant l'action du Soleil que celle de la planète. De cette manière on trouvera l'état de la Comète pour l'intervalle suivant, d'où l'on n'aura qu'à faire les mêmes opérations, jusqu'à ce qu'on soit parvenu au dernier, où l'action de la planète devient tout à fait insensible. Depuis ce temps, on déterminera

l'orbite de la Comète qui résulte de l'action seule du Soleil ; et en comparant tous les éléments de cette nouvelle orbite avec ceux de l'orbite primitive, on connaîtra leurs variations.

Pour déterminer pendant chaque intervalle les changements que subit la Comète sous l'influence du Soleil et de la planète troublante, il part de sa position et de sa vitesse, à l'origine du temps où l'action perturbatrice se fait sentir, projetées sur trois axes rectangulaires se coupant au centre du Soleil et tels que deux d'entre eux soient dans le plan de l'orbite de la planète. a, b, c représentant les coordonnées de la Comète à ce point de départ, α, β, γ les composantes de sa vitesse ; A et B les coordonnées de la planète, U et Z les composantes de sa vitesse : pour un temps quelconque de τ jours après l'époque établie, on aurait pour coordonnées de la Comète,

$$x = a + \alpha t, \quad y = b + \beta t, \quad z = c + \gamma t,$$

et pour la planète

$$\mathrm{X} = \mathrm{A} + \mathrm{U} t, \quad \mathrm{Y} = \mathrm{B} + \mathrm{Z} t;$$

les vitesses étant supposées demeurer les mêmes, c'est-à-dire que dans cette méthode nous regardons les mouvements des corps troublé et troublant comme rectilignes et uniformes pendant chaque intervalle de temps τ. Alors dans les équations différentio-différentielles du mouvement de la planète attirée par le Soleil, de la Comète attirée par le Soleil, et de la Comète attirée par la planète, on remplacera ces coordonnées par leurs valeurs en fonctions de τ. Ainsi dans celle-ci : $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mathrm{M}x}{v^3}$, où M représente la fraction $d\theta^2 = 0{,}000.2959\, d\tau^2$ ou le carré du mouvement diurne du Soleil, et v la distance de la Comète à cet astre : on aura, k, h, l étant des coefficients constants, fonctions de $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ et faciles à calculer :

$$\begin{aligned} d^2x = & -\mathrm{M}ah - \mathrm{M}\alpha h t - \mathrm{M}\alpha k \tau^2 \\ & - \mathrm{M}akt - \mathrm{M}al\tau^2. \end{aligned}$$

On intègrera une première fois et on aura $\frac{dx}{dt}$, composante de la vitesse de la Comète dans son mouvement autour du Soleil ; puis une seconde fois, et on aura la coordonnée x en fonction de τ. En mettant dans cette expression pour τ la valeur établie pour le premier intervalle, et suffisamment

petite pour que les quatrièmes puissances multipliées par les coefficients obtenus soient négligeables, on aura la valeur de x pour le commencement du second intervalle, en y ajoutant l'effet de la planète sur la Comète, qui se calculera de la même manière ; et ainsi de suite. — Arrivé au temps où l'action perturbatrice de la planète cesse d'être sensible, il faudra calculer la nouvelle orbite de la Comète.

On voit que les procédés de Fuss seront très-longs et compliqués dans la pratique. Bornons donc là notre examen, pour passer au mémorable travail de Lagrange sur le même sujet, travail qui exige un examen détaillé, et qui est encore la base de tous les calculs qu'on exécute actuellement.

CHAPITRE DEUXIÈME.

Mémoire de Lagrange couronné en 1780 par l'Académie des Sciences de Paris.

La méthode de la variation des éléments elliptiques, dont Lagrange a tiré un si grand parti par la suite pour la solution des problèmes de dynamique, en la généralisant sous le nom de méthode de la variation des constantes arbitraires, est particulièrement applicable aux perturbations des Comètes. C'est dans la pièce remarquable que nous allons analyser qu'il a développé cette application, et cela avec une précision telle, que l'illustre auteur de la *Mécanique céleste* s'est entièrement basé sur son contenu pour composer le livre IX de son ouvrage. — Le mémoire de Lagrange est divisé en quatre sections, que nous passerons successivement en revue.

SECTION Ire.

Equations différentielles du mouvement d'une Comète autour du Soleil, en ayant égard aux perturbations qu'elle peut éprouver de la part des planètes.

Si nous appelons m la masse d'une Comète (celle du Soleil étant 1), x, y, z ses coordonnées rapportées à trois axes rectangulaires se coupant au centre du Soleil, et r sa distance à cet astre, les équations de son mouvement résultant de la seule attraction du Soleil seront les suivantes :

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{(1+m)x}{r^3} &= 0 & \qquad & \frac{d^2x}{dt^2} = (1+m)\frac{d\,\frac{1}{r}}{dx} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{(1+m)y}{r^3} &= 0 & \quad \text{ou} \quad & \frac{d^2y}{dt^2} = (1+m)\frac{d\,\frac{1}{r}}{dy} \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{(1+m)z}{r^3} &= 0 & & \frac{d^2z}{dt^2} = (1+m)\frac{d\,\frac{1}{r}}{dz} \end{aligned}$$

Si maintenant nous passons au mouvement de la Comète troublé par l'action des planètes perturbatrices, et qu'en raison de la petitesse des altérations qui en résultent dans son mouvement, nous négligions les termes proportionnels aux carrés des masses, nous pourrons considérer séparément l'influence de chacune d'elles. Soient donc μ la masse d'une des planètes troublantes, ξ, η, ζ ses coordonnées rapportées au même système d'axes, ρ sa distance au Soleil, R sa distance à la Comète, les équations du mouvement troublé seront :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (1+m)\,\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \mu\,\frac{d.\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right)}{d\xi}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (1+m)\,\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \mu\,\frac{d.\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right)}{d\eta}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = (1+m)\,\frac{d\frac{1}{r}}{dz} + \mu\,\frac{d.\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right)}{d\zeta}$$

Si δx, δy, δz sont les altérations des coordonnées résultant de l'action des forces troublantes, ces termes seront de l'ordre des masses. En substituant dans ces dernières équations $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ au lieu de x, y, z, enlevant les termes qui se détruisent en raison des relations (1) et négligeant les carrés de ces accroissements, on obtiendra pour les équations des perturbations de la Comète :

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} = (1+m)\left\{\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\delta x + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdy}\delta y + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz}\delta z\right\} + \mu.\frac{d.\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right)}{d\xi}$$

$$(2)\quad \frac{d^2\delta y}{dt^2} = (1+m)\left\{\frac{d^2\frac{1}{r}}{dydx}\delta x + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}\delta y + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dydz}\delta z\right\} + \mu.\frac{d.\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right)}{d\eta}$$

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = (1+m)\left\{\frac{d^2\frac{1}{r}}{dzdx}\delta x + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dzdy}\delta y + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2}.\delta z\right\} + \mu.\frac{d.\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right)}{d\zeta}$$

Ce sont ces équations qu'il faudra intégrer, mais avant de l'entreprendre faisons deux observations importantes.

1° Les termes des équations (2) qui ont μ pour facteur, deviennent d'autant plus petits que x, y, z diminuent. En effet, si x, y, z sont très-petits relativement à ξ, η, ζ, on aura à très-peu près par un théorème connu,

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\rho}-\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\xi}x-\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\eta}y-\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\zeta}z;$$

donc $\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right)$ et ses coefficients différentiels seront de l'ordre de x, y et z; et si ces quantités sont de celui de μ, les seconds termes des équations (2) seront de l'ordre du carré des masses, et par conséquent négligeables.

Or, lorsque x, y, z seront assez petits pour que ces seconds termes se négligent, on satisfera aux équations (2) en posant δx, δy et δz égaux à zéro. Ces valeurs sont les limites des perturbations pour la portion de l'orbite la plus voisine du Soleil. On conçoit en effet que dans ces régions, l'attraction solaire prédomine entièrement sur celle des planètes perturbatrices; on pourra donc considérer cette dernière comme nulle, et s'en tenir au mouvement elliptique autour du foyer principal.

La seconde observation que fait Lagrange a rapport aux limites des perturbations du côté opposé de la trajectoire. Dans les régions supérieures de l'orbite, x, y, z deviennent très-grands relativement à ξ, η et ζ. On peut alors mettre $\frac{1}{R}$ sous la forme

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}-\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\xi-\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\eta-\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\zeta$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\xi^2+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdy}\xi\eta+\frac{1}{2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}\eta^2+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dydz}\eta\zeta+\frac{1}{2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2}\zeta^2+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz}\xi\zeta;$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\frac{1}{R}}{d\xi} = -\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\xi + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdy}\eta + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz}\zeta;$$

et l'équation en δx, parmi les relations (2), devient

$$\frac{d^2.\delta x}{dt^2} = (1+m)\left\{\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\left(\delta x - \frac{\mu}{1+m}\xi\right) + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdy}\left(\delta y - \frac{\mu}{1+m}\eta\right) + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz}\left(\delta z - \frac{\mu}{1+m}\zeta\right)\right\}$$

$$+\mu.\left\{\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\xi} + \frac{d\frac{1}{r}}{dx}\right\}.$$

Si dans cette équation, je fais

$$\delta x = \frac{\mu}{1+\mu}\xi + \alpha,\ \delta y = \frac{\mu}{1+\mu}\eta + \beta,\ \delta z = \frac{\mu}{1+\mu}\zeta + \gamma$$

et que j'observe qu'on a à très-peu près, en vertu du mouvement à peu près elliptique de la Comète et de la planète

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (1+m)\frac{d\frac{1}{r}}{dx},\quad d^2\xi = (1+\mu)\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\xi},$$

cette équation devient, en négligeant les termes multipliés par

$\frac{\mu}{1+\mu} - \frac{\mu}{1+m}$ ou $\frac{\mu(m-\mu)}{(1+\mu)(1+m)}$, coefficient infiniment petit,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = (1+m)\left\{\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\alpha + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdy}\beta + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz}\gamma\right\} + \mu\frac{d\frac{1}{r}}{dx}.$$

On satisfait à cette équation, et aux deux semblables qui résulteraient des deux dernières relations (2) et donneraient la valeur de $\frac{d^2\beta}{dt^2}$ et $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$, en posant

$$\alpha = Kx,\quad \beta = Ky \quad \text{et} \quad \gamma = Kz.$$

Elle devient alors :

$$K\frac{d^2x}{dt^2}=(1+m)K\left\{\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}x+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdy}y+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz}z\right\}+\mu\frac{d\frac{1}{r}}{dx}.$$

Or $\frac{1}{r}$ est une quantité homogène de degré -1; $\frac{d\frac{1}{r}}{dx}$, $\frac{d\frac{1}{r}}{dy}$ et $\frac{d\frac{1}{r}}{dz}$ sont aussi homogènes, mais de degré -2, on aura donc :

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}x+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdy}y+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz}z=-2\frac{d\frac{1}{r}}{dx}.$$

Remplaçant dans notre équation cette valeur et celle de $\frac{d^2x}{dt^2}$ tirée des équations (1), on obtient :

$$(1+m)K\frac{d\frac{1}{r}}{dx}=(1+m)K\left(-2\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\right)+\mu\frac{d\frac{1}{r}}{dx},$$

ou

$$(1+m)3K.\frac{d.\frac{1}{r}}{dx}=\mu.\frac{d.\frac{1}{r}}{dx},$$

d'où nous tirons

$$K=\frac{\mu}{3(1+m)}.$$

Ce qui nous donne pour les valeurs cherchées de δx, δy, δz qui satisferont aux équations (2), quand x, y, z seront très-grands par rapport à ξ, η, ζ :

$$\delta x=\frac{\mu}{1+\mu}\xi+\frac{\mu}{3(1+m)}x$$

$$\delta y=\frac{\mu}{1+\mu}\eta+\frac{\mu}{3(1+m)}y$$

$$\delta z=\frac{\mu}{1+\mu}\zeta+\frac{\mu}{3(1+m)}z.$$

Ces trois expressions sont les limites des valeurs des perturbations que su-

biront les coordonnées de la Comète quand elle s'éloignera du Soleil beaucoup plus que la planète troublante.

La Place remarque (*Méc. Cél.*, liv. IX, p. 196) que le résultat qui précède est une conséquence très-simple du théorème dont nous avons vu d'Alembert tirer parti (p. 18), et suivant lequel, lorsque la Comète est à une grande distance du Soleil, elle peut être considérée comme étant attirée vers le centre commun de gravité du Soleil et de la planète, par une masse égale à la somme des trois corps. Elle décrit alors à peu près une ellipse autour de ce point, et la force attractive qui la lui fait décrire est $\dfrac{1+m+\mu}{r^2}$.

Suivant que r sera plus petit ou plus grand que ρ, Lagrange donne deux transformations des équations (2) dont nous nous servirons plus tard.

Si on suppose

$$\delta x = \mu.\left(\frac{x}{3(1+m)} + \frac{\xi}{1+\mu}\right) + \delta x'$$

$$\delta y = \mu.\left(\frac{y}{3(1+m)} + \frac{\eta}{1+\mu}\right) + \delta y'$$

$$\delta z = \mu.\left(\frac{z}{3(1+m)} + \frac{\zeta}{1+\mu}\right) + \delta z'$$

et

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{r} - \frac{1+m}{1+\mu}\left\{\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\xi + \frac{d\frac{1}{r}}{dy}\eta + \frac{d\frac{1}{r}}{dz}\zeta\right\}.$$

En n'ayant égard qu'aux termes affectés de μ, les équations (2) deviennent :

$$\frac{d^2\delta x'}{dt^2} = (1+m)\left\{\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\delta x' + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdy}\delta y' + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz}\delta z'\right\} - \mu.\frac{d.\left(\frac{1}{S}-\frac{1}{R}\right)}{dx}$$

(3) $$\frac{d^2\delta y'}{dt^2} = (1+m)\left\{\frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdy}\delta x' + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}\delta y' + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dydz}\delta z'\right\} - \mu.\frac{d.\left(\frac{1}{S}-\frac{1}{R}\right)}{dy}$$

$$\frac{d^2\delta z'}{dt^2} = (1+m)\left\{\frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz}\delta x' + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dydz}\delta y' + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2}\delta z'\right\} - \mu.\frac{d.\left(\frac{1}{S}-\frac{1}{R}\right)}{dz}$$

où on a mis au lieu de

$$\frac{d\frac{1}{R}}{d\xi}, \frac{d\frac{1}{R}}{d\eta}, \frac{d\frac{1}{R}}{d\zeta}, \text{ leurs équivalents } -\frac{d\frac{1}{R}}{dx}, -\frac{d\frac{1}{R}}{dy}, -\frac{d\frac{1}{R}}{dz}.$$

$\frac{1}{S}$ renferme les deux premiers termes de $\frac{1}{R}$, développé en série ascendante, procédant suivant les puissances de ξ, η, ζ, en négligeant la différence infiniment petite entre $\frac{1+m}{1+\mu}$ et l'unité; on se servira donc de ces équations quand r sera plus grand que ρ.

Si au contraire on pose

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\rho} - \left\{ \frac{d\frac{1}{\rho}}{d\xi} x + \frac{d\frac{1}{\rho}}{d\eta} y + \frac{d\frac{1}{\rho}}{d\zeta} z \right\},$$

$\frac{1}{\sigma}$ renfermant les deux premiers termes de $\frac{1}{R}$, développé en série ascendante, procédant suivant les puissances de x, y, z, et qu'on le substitue dans les équations (2), on obtient :

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} = (1+m)\left\{ \frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\delta x + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdy}\delta y + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz}\delta z \right\} - \mu . \frac{d\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{R}\right)}{dx}$$

(4) $$\frac{d^2\delta y}{dt^2} = (1+m)\left\{ \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdy}\delta x + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}\delta y + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dydz}\delta z \right\} - \mu . \frac{d\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{R}\right)}{dy}$$

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = (1+m)\left\{ \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz}\delta x + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dydz}\delta y + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2}\delta z \right\} - \mu . \frac{d\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{R}\right)}{dz}$$

Relations qu'on emploiera quand r sera plus petit que ρ, c'est-à-dire quand la Comète sera plus près du Soleil que la planète troublante.

SECTION II.

Intégration des équations différentielles de l'orbite non altérée.

Les trois équations différentielles du deuxième ordre du mouvement elliptique, doivent avoir trois intégrales complètes, renfermant six constantes arbitraires. Suivons Lagrange dans la méthode qu'il indique pour les obtenir, afin d'employer les mêmes constantes.

Il observe d'abord, qu'en vertu des deux premières équations, on satisfait à la troisième en posant :

(5) $$z = bx + cy.$$

L'intégrale des forces vives lui fournit ensuite

$$\frac{d^2p}{dt^2} + (1+m)\frac{p}{r^3} = 0, \quad \text{où } p = 2h - r.$$

Cette équation est de la même forme que les primitives, elle est donc satisfaite en posant

$$p = fx + gy,$$

ou

(6) $$2h - r = fx + gy.$$

La même intégrale première des forces vives donne encore l'équation

$$\frac{rdr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}} = \sqrt{2(1+m)}.\, dt,$$

où a est une constante arbitraire ; cette équation s'intègre et devient [1]

(7) $$\text{arc}\left(\sin. = \frac{2\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{a - 4h}}\right) - \frac{2\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{a}} = 2t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} + i.$$

[1] Voir NOTE II.

Les trois équations (5), (6) et (7) sont les intégrales complètes des équations proposées ; elles renferment une constante de trop, car il y en a sept : a, b, c, f, g, h, i. Mais ces sept constantes satisfont à une équation de condition qui réduit leur nombre à six, et qui est [1] :

$$(8) \qquad 1 - \frac{(cf - bg^2) + g^2 + f^2}{1 + b^2 + c^2} = \frac{4h}{a}.$$

Voici maintenant les relations qui lient les constantes introduites dans ces équations, avec les éléments employés ordinairement pour déterminer les orbites des Comètes.

L'équation (5) est celle du plan de l'orbite de la Comète. Si ω est l'angle que son intersection sur celui des xy fait avec l'axe des x, et ψ l'inclinaison de ces deux plans, on devra avoir :

$$c = \text{tang.}\,\psi \cos.\,\omega, \qquad b = -\text{tang.}\,\psi.\ \sin.\,\omega.$$

L'équation (6) indique que l'orbite doit être une section conique, dont r est le rayon vecteur. Les deux apsides seront aux points où $\frac{dr}{dt} = 0$, c'est-à-dire aux points où $r = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4ah}}{2}$. La somme de ces deux valeurs sera égale au grand axe a. Leur différence divisée par a, vaudra l'excentricité $e = \sqrt{1 - \frac{4h}{a}}$, et $4h$ sera le paramètre de l'orbite.

A 90° d'anomalie, le rayon $r = 2h$ et l'équation (6) donne

$$fx + gy = 0, \quad \text{d'où } \frac{y}{x} = -\frac{f}{g};$$

c'est la valeur de la tangente de l'angle que fait avec l'axe des x, dans le plan des xy, la projection du rayon vecteur répondant à 90° dans l'orbite.

Soit cet angle 90° + ε, on aura $\frac{g}{f} = \text{tang.}\,\varepsilon$; faisant $l = \sqrt{f^2 + g^2}$, on aura $g = l \sin.\, r$, $f = l \cos.\, r$. Ces valeurs étant substituées dans l'équation (8), elle deviendra :

(1) Voir NOTE III.

$$e^2 = l^2 \frac{1 + \text{tang.}^2 \psi \cos.^2 (\omega - \varepsilon)}{1 + \text{tang.}^2 \psi},$$

ou

$$e^2 = l^2 \left(1 - \sin.^2 \psi \sin.^2 (\omega - \varepsilon)\right),$$

d'où

$$l = \frac{e}{\sqrt{1 - \sin.^2 \psi . \sin.^2 (\omega - \varepsilon)}},$$

et

$$f = \frac{e \cos. \varepsilon}{\sqrt{1 - \sin.^2 \psi . \sin.^2 (\omega - \varepsilon)}}, \quad g = \frac{e \sin. \varepsilon}{\sqrt{1 - \sin.^2 \psi . \sin.^2 (\omega - \varepsilon)}}.$$

Si on fait coïncider le plan de l'orbite avec celui des xy, on aura $\psi = 0$, et ε sera l'angle que fait le grand axe avec l'axe des x. Si on suppose en outre qu'ils coïncident, on aura aussi $\varepsilon = 0$ et par là

$$b = 0, \quad c = 0, \quad f = e, \quad g = 0$$

et

$$x = \frac{p}{e}, \quad y = \frac{q}{e}, \quad z = 0,$$

ou

$$x = \frac{2h - r}{e}, \quad y = \frac{2\sqrt{h}}{e} \sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h};$$

x et y devenant les coordonnées de l'orbite dans le plan même de cette orbite, indépendamment de la position de ce plan.

Si on appelle φ l'angle du rayon vecteur avec le grand axe, on aura :

$$x = r \cos. \varphi, \quad y = r \sin. \varphi, \quad r = \frac{2h}{1 + e \cos. \varphi}.$$

Cette expression de r montre que φ est l'anomalie vraie dans l'orbite, comptée du périhélie.

Les valeurs générales de x, y, z s'expriment (note III) au moyen des constantes b, c, f, g et du rayon vecteur r, on pourra donc les obtenir en fonctions des éléments de l'orbite elliptique et de la seule anomalie φ. Appelant α l'anomalie correspondant au nœud, $\varphi - \alpha$ sera l'argument de la latitude, et on aura :

$$x = r\,\{\cos.\omega\cos.(\varphi-\alpha) - \sin.\omega\sin.(\varphi-\alpha)\cos.\psi\}$$
$$y = r\,\{\sin.\omega\cos.(\varphi-\alpha) + \cos.\omega\sin.(\varphi-\alpha)\cos.\psi\}$$
$$z = r\,\{\sin.\psi\sin.(\varphi-\alpha)\}.$$

Si on fait

$$\frac{2\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}}{\sqrt{a-4h}} = \sin.u, \qquad \text{(équation (7))}$$

et

$$\frac{2t\sqrt{2(1+m)}}{a^{\frac{3}{2}}} + i = \theta, \qquad \text{d'après Kepler,}$$

on a

$$\theta = e\sin.u,$$

u étant l'anomalie excentrique (note II) comptée du périhélie, et θ l'anomalie moyenne.

Pour $t = o$, on a $\theta = i$; la constante n'est donc pas autre chose que l'époque de l'anomalie moyenne.

SECTION III.

Intégration des équations différentielles des perturbations.

Reprenons maintenant les équations (4) des perturbations de la Comète; leur intégration dépend, vû la forme linéaire sous laquelle paraissent les variables inconnues δx, δy, δz, de celle d'équations analogues sans derniers termes, c'est-à-dire de la forme :

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\delta x}{dt^2} = (1+m)\left\{\dfrac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\delta x + \dfrac{d^2\frac{1}{r}}{dxdy}\delta y + \dfrac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz}\delta z\right\} \\[2ex] \dfrac{d^2\delta y}{dt^2} = (1+m)\left\{\dfrac{d^2\frac{1}{r}}{dydx}\delta x + \dfrac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}\delta y + \dfrac{d^2\frac{1}{r}}{dydz}\delta z\right\} \\[2ex] \dfrac{d^2\delta z}{dt^2} = (1+m)\left\{\dfrac{d^2\frac{1}{r}}{dzdx}\delta x + \dfrac{d^2\frac{1}{r}}{dzdy}\delta y + \dfrac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2}\delta z\right\}. \end{cases}$$

Ces équations résultent de celles de l'orbite non altérée, en y faisant varier x, y, z des différences δx, δy, δz, regardées comme infiniment petites. Leurs intégrales doivent donc aussi résulter de celles du mouvement elliptique, en y faisant varier, non-seulement ces mêmes quantités, mais encore les constantes arbitraires que les intégrales cherchées doivent renfermer pour être complètes.

Pour obtenir ces variations des constantes arbitraires, nous pourrions différentier à l'ordinaire les intégrales de l'orbite non altérée, trouvées dans la deuxième section, en y regardant les indéterminées x, y, z et les six arbitraires a, b, c, f, g, i comme variables à la fois, et marquant leurs différences par la caractéristique δ. Pour donner à ce calcul toute la simplicité dont il est susceptible, nous remarquerons de plus que la position du plan des xy, auquel nous avons jusqu'ici rapporté l'orbite de la Comète, étant arbitraire, on peut sans nuire à la généralité du problème, supposer que ce plan coïncide avec celui de l'orbite non altérée de la Comète; et on peut, par la même raison, supposer aussi que l'axe des x coïncide avec le grand axe de la même orbite, en sorte que les abscisses x soient prises depuis le foyer et soient positives en allant vers l'apside inférieure.

Il résulte de ces deux suppositions :

$$\psi=o,\quad \alpha=\omega,\quad b=o,\quad c=o,\quad f=e,\quad g=o;$$

ce qui donne aux coordonnées les valeurs suivantes, où l'on conserve ces constantes pour les faire varier ensuite :

$$x=\frac{a}{2}(\cos.u-f)-\frac{ag}{2f}\sqrt{1-f^2}\sin.u,$$

(10) $$y=\frac{a}{2}\sqrt{1-f^2}\sin.u+\frac{ag}{2f}(\cos.u-f),$$

$$z=\frac{ab}{2}(\cos.u-f)+\frac{ac}{2}\sqrt{1-f^2}\sin.u.$$

Différentiant suivant la caractéristique δ, en faisant tout varier, on trouvera les valeurs de δx, δy, δz en fonctions de δa, δb, etc. et de coefficients fonctions du temps, de la forme

$$(11) \qquad \begin{aligned} \delta x &= A\delta a + B\delta f + C\delta g + D\delta i \\ \delta y &= E\delta a + F\delta f + G\delta g + H\delta i \\ \delta z &= K\delta b + L\delta c. \end{aligned}$$

Différentiant de nouveau relativement au temps, δa, δb, etc. étant considérés comme constants, on obtient trois nouvelles équations qui donnent $\frac{d.\delta x}{dt}$, $\frac{d.\delta y}{dt}$, $\frac{d.\delta z}{dt}$. Combinées avec les précédentes, on pourra en tirer par la méthode ordinaire d'élimination, les valeurs des six inconnues $\delta a, \delta b, \delta c, \delta f, \delta g, \delta i$. Elles seront de la forme

$$(12) \qquad \begin{aligned} \delta a &= A'\delta x + B'\delta y + C'\frac{d\delta x}{dt} + D'\frac{d\delta y}{dt}, \\ \delta f &= E'\delta x + F'\delta y + G'\frac{d\delta x}{dt} + H'\frac{d\delta y}{dt}, \\ \delta g &= A''\delta x + B''\delta y + C''\frac{d\delta x}{dt} + D''\frac{d\delta y}{dt}, \\ \delta i &= E''\delta x + F''\delta y + G''\frac{d\delta x}{dt} + H''\frac{d\delta y}{dt}, \\ \delta b &= K'\delta z + L'\frac{d\delta z}{dt}, \\ \delta c &= K''\delta z + L''\frac{d\delta z}{dt}. \end{aligned}$$

Mais Lagrange indique une méthode qui abrége beaucoup ce calcul.

Elle consiste à chercher d'abord les valeurs des six constantes en fonctions de x, y, z, t et $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, ce qui se fera facilement par les équations (5) à (8), puis à différentier ces valeurs relativement à la caractéristique δ. On obtiendra ainsi, en posant pour simplifier

$$K = \sqrt{\frac{h}{1+b^2+c^2}} = \frac{xdy - ydx}{dt\sqrt{2(1+m)}},$$

les équations suivantes :

$$\delta a = a^2 \left\{ \frac{\delta r}{r^2} + \frac{dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z}{(1+m)\,dt^2} \right\},$$

$$\delta K = \frac{dy\delta x - dx\delta y + xd\delta y - yd\delta x}{dt\sqrt{2(1+m)}},$$

$$\delta f = \frac{dy(2\delta h - \delta r) + dr\delta y + (2h - r)\,d\delta y + yd\delta r}{K\,dt\sqrt{2(1+m)}} - \frac{f\delta K}{K},$$

$$\delta g = -\frac{dx(2\delta h - \delta r) + dr\delta x + (2h - r)\,d\delta x + xd\delta r}{K\,dt\sqrt{2(1+m)}} - \frac{g\delta K}{K},$$

$$\delta b = \frac{dy\delta z - dz\delta y + zd\delta y - yd\delta z}{K\,dt\sqrt{2(1+m)}} - \frac{b\delta K}{K},$$

$$\delta c = -\frac{dx\delta z - dz\delta x + zd\delta x - xd\delta z}{K\,dt\sqrt{2(1+m)}} - \frac{c\delta K}{K},$$

$$\delta h = 2(1 + b^2 + c^2)\,K\delta K + 2K^2(b\delta b + c\delta c);$$

où l'on devra substituer pour δr sa valeur $\dfrac{x\delta x + y\delta y + z\delta z}{r}$. Nous avons donné ici la variation de h, qui doit être traitée comme variable, parce que c'est une fonction de a, b, c, f et g donnée par l'équation (8). Reste encore à déterminer δi, pour laquelle nous poserons

$$\frac{r}{a} = v, \quad \frac{h}{a} = n, \quad \frac{2\sqrt{v - v^2 - n}}{\sqrt{1 - 4n}} = V.$$

On obtient alors

$$\delta i = 3t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^5}}\,\delta a + \frac{2v\delta v + \dfrac{2\delta n}{1-4n}(v - 2n)}{\sqrt{v - v^2 - n}},$$

qui se transforme (note IV) en

$$\delta i = 3t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^5}}\,\delta a + \frac{2}{a^2\sqrt{1-4n}}\left\{ p\delta\frac{q}{\sqrt{n(1+b^2+c^2)}} - \frac{q}{\sqrt{n(1+b^2+c^2)}}(\delta p - 2a\delta n) \right\}.$$

Ces formules ont toute la généralité possible; mais pour les appliquer à

notre cas, il faut y supposer $b = o$, $c = o$, $g = o$, et par suite $z = o$ et $\frac{dz}{dt} = o$. On aura de plus $K = \delta h$ et $\delta K = \frac{\delta h}{2\sqrt{h}}$. Faisant ces substitutions, après quelques simplifications sur lesquelles nous ne nous arrêterons pas, les formules deviendront :

$$\delta h = 2h \frac{dy\delta x - dx\delta y + xd\delta y - yd\delta x}{dt\sqrt{2h(1+m)}},$$

$$\delta a = a^2 \left(\frac{x\delta x + y\delta y}{r^3} + \frac{dxd\delta x + dyd\delta y}{(1+m)dt^2} \right),$$

$$\delta f = \frac{y}{r^3}(x\delta y - y\delta x) - \left(f + \frac{x}{r}\right)\frac{dy\delta x - yd\delta x}{dt\sqrt{2h(1+m)}} - \frac{y}{r}\frac{dy\delta y - yd\delta y}{dt\sqrt{2h(1+m)}} + \frac{2dy\delta h}{dt\sqrt{2h(1+m)}},$$

(13) $$\delta g = -\frac{x}{r^3}(x\delta y - y\delta x) + \left(f + \frac{x}{r}\right)\frac{dx\delta x - xd\delta x}{dt\sqrt{2h(1+m)}} + \frac{y}{r}\frac{dx\delta y - xd\delta y}{dt\sqrt{2h(1+m)}} - \frac{2dx\delta h}{dt\sqrt{2h(1+m)}},$$

$$\delta b = \frac{dy\delta z - yd\delta z}{dt\sqrt{2h(1+m)}},$$

$$\delta c = \frac{-dx\delta z + xd\delta z}{dt\sqrt{2h(1+m)}},$$

$$\delta i = 3t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^5}}\,\delta a + \frac{2\left(x\delta y - y\delta x - \frac{r^2\delta g}{f}\right)}{\sqrt{a^3 h}} + \frac{y(fx - 4h)\delta f}{2\sqrt{ah^3}}.$$

Telles sont donc les valeurs des quantités δh, δa, δb, δc, δf et δi en δx, δy, δz, $\frac{d\delta z}{dt}$, $\frac{d\delta y}{dt}$, $\frac{d\delta z}{dt}$: en remplaçant ces variables et leurs coefficients différentiels par leurs valeurs en fonctions de u et de r déduites des équations (10), on obtiendra les variations des constantes arbitraires du mouvement elliptique en fonctions du rayon vecteur et de l'anomalie excentrique, et leurs expressions devront coïncider avec celles qu'on aurait déduites des équations (10) par l'élimination.—Voyons à déterminer par leur moyen les arbitraires des intégrales complètes des équations (4), qui sont celles des perturbations de la Comète.

Les équations (4) ne diffèrent des équations (9) que par la présence de

leurs derniers termes, que nous désignerons, pour abréger, par $-\mu X$, $-\mu Y$ et $-\mu Z$, en sorte que

$$X = d\frac{\left(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{R}\right)}{dx}, \quad Y = d\frac{\left(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{R}\right)}{dy}, \quad Z = d\frac{\left(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{R}\right)}{dz}.$$

Si on suppose que les mêmes expressions de δx, δy, δz qui satisfont aux équations (9), satisfassent aux équations (4), mais en y regardant les six quantités δa, δb, δc, δf, δg, δi comme des variables indéterminées, et qu'on en fasse la substitution, il est visible que les termes qui renfermeront ces variables finies s'en iront aussi, et que les équations résultantes seront, à cause des expressions (11) :

$$\frac{Ad^2\delta a + Bd^2\delta f + Cd^2\delta g + Dd^2\delta i}{dt^2} + 2\,\frac{dAd\delta a + dBd\delta b + dCd\delta g + dDd\delta i}{dt^2} = -\mu X$$

$$\frac{Ed^2\delta a + Fd^2\delta f + Gd^2\delta g + Hd^2\delta i}{dt^2} + 2\,\frac{dEd\delta a + dFd\delta b + dGd\delta g + dHd\delta i}{dt^2} = -\mu Y$$

$$\frac{Kd^2\delta b + Ld^2\delta c + 2(dKd\delta b + dLd\delta c)}{dt^2} = -\mu Z.$$

Comme il y a ici six variables indéterminées, et qu'il n'y a que trois équations pour la détermination de ces variables, il est clair qu'on peut supposer à volonté trois autres équations entre ces mêmes variables, et il sera à propos de prendre ces équations en sorte que les différences secondes des variables δa, δb, etc. disparaissent d'elles-mêmes : c'est de quoi l'on viendra à bout en posant

$$\frac{Ad\delta a + Bd\delta f + Cd\delta g + Dd\delta i}{dt} = 0,$$

(14) $$\frac{Ed\delta a + Fd\delta f + Gd\delta g + Hd\delta i}{dt} = 0,$$

$$\frac{Kd\delta b + Ld\delta c}{dt} = 0.$$

Car en retranchant respectivement des équations précédentes les différences de celles-ci, on aura :

$$\frac{d\mathrm{A}d\delta a + d\mathrm{B}d\delta f + d\mathrm{C}d\delta g + d\mathrm{D}d\delta i}{dt^2} = -\mu \mathrm{X},$$

(14) $$\frac{d\mathrm{E}d\delta a + d\mathrm{F}d\delta f + d\mathrm{G}d\delta g + d\mathrm{H}d\delta i}{dt^2} = -\mu \mathrm{Y},$$

$$\frac{d\mathrm{K}d\delta b + d\mathrm{L}d\delta c}{dt^2} = -\mu \mathrm{Z}.$$

Ayant ainsi six équations entre les six quantités $\frac{d\delta a}{dt}$, $\frac{d\delta f}{dt}$, $\frac{d\delta g}{dt}$, $\frac{d\delta i}{dt}$, $\frac{d\delta b}{dt}$, $\frac{d\delta c}{dt}$, on déterminera par l'élimination la valeur de chacune d'elles; ensuite il n'y aura plus qu'à multiplier ces différentes valeurs par dt et à les intégrer; on aura de cette manière les valeurs des variables δa, δb, δc, δf, δg, δi, qu'il faudra substituer dans les expressions (11) de δx, δy, δz; et les équations (4), qui expriment les perturbations de la Comète, seront résolues.

Il est important de remarquer, que si on différentie les expressions de δx, δy, δz, on aura, en vertu des équations supposées ci-dessus,

$$d\delta x = d\mathrm{A}\delta a + d\mathrm{B}\delta f + d\mathrm{C}\delta g + d\mathrm{D}\delta i,$$
$$d\delta y = d\mathrm{E}\delta a + d\mathrm{F}\delta f + d\mathrm{G}\delta g + d\mathrm{H}\delta i,$$
$$d\delta z = d\mathrm{K}\delta b + d\mathrm{L}\delta c,$$

précisément comme si les quantités δa, δb, etc., étaient constantes; parce que les termes dépendants des variations de ces quantités sont précisément ceux qui forment les équations supposées. On peut donc en conclure, que si les équations différentielles (4) contenaient aussi les différences premières de δx, δy, δz, elles s'intégreraient également par la méthode qu'on vient d'exposer et on parviendrait aux mêmes résultats.

Il y a plus, et c'est ici le point essentiel: dans l'orbite non altérée, on a pour coordonnées x, y, z, fonctions du temps t et des six constantes arbitraires a, f, g, i, b, c, lesquelles déterminent les six éléments de l'orbite. Dans l'orbite troublée, les coordonnées sont $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, les quantités δx, δy, δz n'étant autre chose que les variations de x, y, z provenant des variations δa, δf, δg, δi, δb, δc des six constantes a, f, g, i, b et c.

Ainsi dans l'orbite troublée, les coordonnées sont exprimées de la même manière que dans l'orbite non troublée, c'est-à-dire qu'elles sont les mêmes fonctions de t et de $a+\delta a$, $f+\delta f$, $g+\delta g$, $i+\delta i$, $b+\delta b$ et $c+\delta c$, qu'elles le sont de t, a, f, g, i, b et c dans l'orbite non troublée. Par conséquent, on peut à chaque instant considérer l'orbite troublée comme étant de la même forme que l'orbite non troublée. Mais les éléments de l'orbite troublée dépendent des quantités $a+\delta a$, $f+\delta f$, etc., lesquelles sont variables ; il suit de là que les éléments de l'orbite troublée seront variables aussi, et que les quantités δa, δf, etc., serviront à déterminer leurs variations. Or comme nous venons de voir que les valeurs de ces quantités sont telles, que les différences premières de δx, δy, δz sont les mêmes que si ces quantités étaient constantes, il est aisé d'en conclure que les éléments de l'orbite troublée, quoique essentiellement variables, peuvent néanmoins être regardés comme constants pendant un instant ; et qu'ainsi, non-seulement le lieu de la Comète dans l'orbite troublée, mais encore son mouvement instantané, c'est-à-dire sa vitesse et sa direction, seront dans chaque instant les mêmes que l'on trouverait en les déterminant à l'ordinaire dans une orbite fixe, dont les éléments seraient ceux qui répondent à ce même instant. (Voy. *Méc. Cél.*, liv. II, p. 322.)

La difficulté est donc réduite à déterminer les valeurs des quantités δa, δf, δg, δi, δb et δc au moyen des six équations (14). Or en comparant ces équations avec celles qui donnent δx, δy, δz et leurs différentielles $\frac{d\delta x}{dt}$, $\frac{d\delta y}{dt}$, $\frac{d\delta z}{dt}$, on voit qu'elles sont semblables et qu'elles peuvent se déduire de ces mêmes formules, en y changeant seulement les quantités δa, δf, etc., en leurs différences $\frac{d\delta a}{dt}$, $\frac{d\delta f}{dt}$, etc., et en y supposant en même temps $\delta x = o$, $\delta y = o$, $\delta z = o$, et $\frac{d\delta x}{dt} = -\mu X$, $\frac{d\delta y}{dt} = -\mu Y$, $\frac{d\delta z}{dt} = -\mu Z$.

Donc en faisant ces mêmes suppositions dans les expressions de δa, δf, etc. en δx, $\frac{d\delta x}{dt}$, δy, etc., on aura les valeurs des différences $\frac{d\delta a}{dt}$, $\frac{d\delta f}{dt}$, etc., et on obtiendra

$$\frac{d\delta a}{dt} = -\mu(C'X + D'Y), \qquad \frac{d\delta f}{dt} = -\mu(G'X + H'Y),$$

$$\frac{d\delta g}{dt} = -\mu(C''X + D''Y), \qquad \frac{d\delta i}{dt} = -\mu(G''X + H''Y),$$

$$\frac{d\delta b}{dt} = -\mu L'Z, \qquad \frac{d\delta c}{dt} = -\mu L''Z;$$

équations qui intégrées, donneront les valeurs de δa, δf, etc.

On sait en effet qu'en général, pour trouver les intégrales des équations (4) qui déterminent les perturbations de la Comète, il n'y a qu'à différentier chacune des formules (13), que je représenterai par l'équation $\Delta = \Phi$, en n'y faisant varier que la constante Δ et les différences premières $\frac{d\delta x}{dt}$, $\frac{d\delta y}{dt}$, $\frac{d\delta z}{dt}$, et y substituer ensuite à la place de $\frac{d^2\delta x}{dt}$, $\frac{d^2\delta y}{dt}$, $\frac{d^2\delta z}{dt}$ les quantités $-\mu X$, $-\mu Y$, $-\mu Z$; on aura par ce moyen la valeur de $d\Delta$ dont l'intégrale sera celle de Δ. (Voy. *Méc. Cél.*, liv. II, p. 324.)

Ayant ainsi déterminé les valeurs des différentes quantités Δ, qui étaient auparavant constantes et qui sont devenues maintenant des fonctions de t, on aura des intégrales premières de la même forme qu'auparavant; par conséquent les intégrales secondes ou finies qui résulteront de celles-là par l'élimination des différences premières $\frac{d\delta x}{dt}$, $\frac{d\delta y}{dt}$, $\frac{d\delta z}{dt}$, seront encore de la même forme; d'où il s'ensuit que tant ces différences que les variables finies δx, δy, δz, seront aussi de la même forme, c'est-à-dire les mêmes fonctions de t et des différentes quantités Δ que dans le cas où ces quantités seraient constantes.

Appliquons cette méthode aux équations (13); on aura en différentiant de la manière indiquée :

$$(15)\qquad \begin{aligned} d\delta h &= -\mu \frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{1+m}} (xY - yX)\, dt, \\ d\delta a &= -a^2 \frac{\mu}{1+m} (X\,dx + Y\,dy), \end{aligned}$$

$$d\delta f = -\frac{\mu y dt}{\sqrt{2h(1+m)}}\left\{\left(f+\frac{x}{r}\right)X+\frac{y}{r}Y\right\}+\frac{2dyd\delta h}{dt\sqrt{2h(1+m)}},$$

$$d\delta g = \frac{\mu x dt}{\sqrt{2h(1+m)}}\left\{\left(f+\frac{x}{r}\right)X+\frac{y}{r}Y\right\}-\frac{2dxd\delta h}{dt\sqrt{2h(1+m)}},$$

(15) $$d\delta b = \frac{\mu y dt}{\sqrt{2h(1+m)}}Z,$$

$$d\delta c = -\frac{\mu x dt}{\sqrt{2h(1+m)}}Z,$$

$$d\delta i = 3t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^5}}\,d\delta a - \frac{2r^2 d\delta g}{f\sqrt{a^5 h}} + \frac{y(fx-4h)\,d\delta f}{2\sqrt{ah^5}}.$$

L'intégration de ces formules déterminera les valeurs des quantités δa, δf, etc., et il est visible que cette intégration n'exigera que de simples quadratures, puisque x, y, X, Y et Z sont censées données en t, d'après les mouvements supposés connus de la Comète dans l'orbite non altérée et de la planète perturbatrice dans son orbite. Connaissant ces différentes quantités, on aura les éléments de l'orbite troublée, au moyen desquels on pourra calculer, par les méthodes ordinaires, tant le lieu que la vitesse et la direction de la Comète dans un instant quelconque.

D'après ce qui a été dit à la fin de la première section, sur le calcul des perturbations dans la portion supérieure de l'orbite, si nous faisons

$$\delta x = \mu\left\{\frac{x}{3(1+m)}+\frac{\xi}{1+\mu}\right\}+\delta x',$$

$$\delta y = \mu\left\{\frac{y}{3(1+m)}+\frac{\eta}{1+\mu}\right\}+\delta y',$$

$$\delta z = \mu\left\{\frac{z}{3(1+m)}+\frac{\zeta}{1+\mu}\right\}+\delta z';$$

et de plus

$$X' = d\frac{\left(\frac{1}{S}-\frac{1}{R}\right)}{dx},\qquad Y' = d\frac{\left(\frac{1}{S}-\frac{1}{R}\right)}{dy},\qquad Z' = d\frac{\left(\frac{1}{S}-\frac{1}{R}\right)}{dz};$$

on aura entre $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ et X', Y', Z' les mêmes équations qu'entre δx, δy, δz et X, Y, Z, c'est-à-dire de la même forme que les équations (4). On peut donc appliquer à ces équations les mêmes raisonnements et les mêmes opérations que nous venons de faire sur celles-là, et en tirer des conclusions semblables. On obtiendra deux systèmes de relations, analogues les premières aux équations (13), qui fourniront $\delta a'$, $\delta f'$, $\delta g'$, etc. en $\delta x'$, $\frac{d\delta x'}{dt}$, $\delta y'$, etc., les secondes aux équations (14), qui donneront $d\delta a'$, $d\delta f'$, etc. en X', Y', Z'.

Supposons qu'on substitue, dans les formules (13), les valeurs précédentes de δx, δy, δz, les valeurs de δa, δh, etc. deviendront

$$\delta h = \mu \mathrm{H} + \delta h',$$
$$\delta a = \mu \mathrm{A} + \delta a',$$
$$\delta f = \mu \mathrm{F} + \delta f',$$
$$\text{etc.},$$

appelant μH, μA, μF, etc. les valeurs de δh, δa, δf, provenant de la substitution de $\mu\left(\frac{x}{3(1+m)}+\frac{\xi}{1+\mu}\right)$ pour δx, $\mu\left(\frac{y}{3(1+m)}+\frac{\eta}{1+\mu}\right)$ pour δy, et $\mu\left(\frac{z}{3(1+m)}+\frac{\zeta}{1+\mu}\right)$ pour δz. Nous aurons de plus, par les équations (15),

$$d\delta h' = -\mu\sqrt{\frac{2h}{1+m}}(x\mathrm{Y}'-y\mathrm{X}')dt,$$

$$d\delta a' = -\frac{\mu}{1+m}a^2(\mathrm{X}'dx+\mathrm{Y}'dy),$$

$$d\delta f' = -\frac{\mu y dt}{\sqrt{2h(1+m)}}\left\{\left(f+\frac{x}{r}\right)\mathrm{X}'+\frac{y}{r}\mathrm{Y}'\right\}-\frac{2dx d\delta h'}{dt\sqrt{2h(1+m)}}.$$

etc.

Si on remplace, dans les différentielles des équations qui précèdent, $d\delta h'$, $d\delta a'$, etc. par ces valeurs, on obtient un nouveau système de formules :

$$d\delta h = \mu dH - \mu \sqrt{\frac{2h}{1+m}}(xY' - yX'),$$

(16) $$d\delta a = \mu dA - \frac{\mu}{1+m} a^2 (X' dx + Y' dy),$$

$$d\delta f = \mu dF - \frac{\mu y dt}{\sqrt{2h(1+m)}} \left\{ \left(f + \frac{x}{r} \right) X' + \frac{y}{r} Y' \right\} + \frac{2 dy d\delta h'}{dt \sqrt{2h(1+m)}} \cdot$$

etc.,

qui sont au fond identiques avec les équations (15), mais dont on peut tirer une conclusion importante pour le cas qui nous occupe : c'est qu'il est permis de changer dans les dites équations (15) les quantités X, Y, Z en X', Y', Z', pourvu qu'on ajoute en même temps aux valeurs de $d\delta h$, $d\delta a$, $d\delta f$, etc. les quantités μdH, μdA, μdF, etc. D'où il suit que dans l'intégration de l'une de ces formules, $d\delta h$ par exemple, on peut changer à volonté les quantités X, Y, Z en leurs analogues X', Y', Z' et rétablir ensuite celles-là à la place de celles-ci, pourvu qu'on ajoute en même temps à la valeur finie de δh la quantité $\mu H'' - \mu H'$, qui est la différence des deux valeurs de μH, dont l'une $\mu H'$ se rapporte au point où X, Y, Z se changent en X', Y', Z', et l'autre $\mu H''$ se rapporte au point où X', Y', Z' redeviennent X, Y, Z. Le même raisonnement s'applique aux autres équations qui fournissent $d\delta a$, $d\delta f$, etc.; et si on voulait substituer à plusieurs reprises les quantités X', Y', Z' à la place de X, Y, Z, on ferait la même opération pour chaque nouvelle substitution.

Lagrange s'occupe encore spécialement dans cette section de l'altération du temps périodique de la Comète, comme étant la perturbation la plus importante à déterminer. Cela se fait facilement par l'équation

$$d\delta\theta = -3\, dt \sqrt{\frac{2(1+m)}{a^5}}\,\delta a - \frac{2r^2 \delta g}{f\sqrt{a^3 h}} + \frac{y(xf - 4h)\, d\delta f}{2\sqrt{ah^5}} \cdot$$

(voy. note IV) qui donne la variation de l'anomalie moyenne. On a pour l'instant du passage au périhélie dans l'orbite troublée $\theta + \delta\theta = 0$, ou $\theta = -\delta\theta$, ou, ce qui revient au même, $\theta = 360° - \delta\theta$. Si on appelle δt le temps qui répond à l'anomalie $\delta\theta$ dans l'orbite troublée, on aura (p. 32) :

$$\partial\theta = 2\,\partial t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} \quad \text{et} \quad \partial t = \partial\theta\sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}\,;$$

c'est le temps dont le passage au périhélie de l'orbite troublée précédera celui de l'orbite non altérée.

Soient $\partial\theta'$ et $\partial\theta''$ les valeurs de $\partial\theta$ qui répondent à deux périhélies consécutifs, et $\partial t'$, $\partial t''$ les valeurs correspondantes de ∂t, en sorte que l'on ait

$$\partial t' = \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}\,\partial\theta'\,, \qquad \partial t'' = \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}\,\partial\theta''.$$

Appelons en outre t' et t'' les temps des passages aux deux périhélies consécutifs dans l'orbite non altérée, on aura pour les temps de ces passages dans l'orbite troublée $t' - \partial t'$, $t'' - \partial t''$; donc la différence de ces temps, c'est-à-dire l'intervalle entre deux passages consécutifs dans l'orbite troublée, sera $t'' - t' + \partial t' - \partial t''$, où $t'' - t'$ est le même intervalle pour l'orbite non altérée. Donc la révolution anomalistique dans l'orbite troublée, surpassera celle dans l'orbite non altérée, du temps exprimé par

$$\partial t' - \partial t'' = \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}\,(\partial\theta' - \partial\theta'')\,;$$

c'est l'altération résultant des perturbations, en tant qu'on néglige le carré des forces perturbatrices.

Pour avoir l'altération de la révolution périodique, on défalquera de la perturbation précédente le temps dû au changement du périhélie. Or le périhélie de l'orbite troublée se trouve plus avancé que l'autre d'un angle $\partial\varepsilon = \dfrac{\partial g}{e}$; si on appelle $\partial\varepsilon'$ et $\partial\varepsilon''$ les valeurs de $\partial\varepsilon$ répondant à t' et t'', on devra déduire de l'altération de la révolution anomalistique précédente, le temps correspondant à l'angle ou à l'anomalie vraie $\partial\varepsilon'' - \partial\varepsilon'$, pour avoir celle de la révolution périodique.

A cause de $dt = \dfrac{r^2 d\varphi}{\sqrt{2h(1+m)}}$, faisant $d\varphi = \partial\varepsilon'' - \partial\varepsilon'$ et r égal à la distance périhélie $\dfrac{a}{2}(1-e)$ ou $\dfrac{2h}{1+e}$, on aura pour le temps cherché :

$$\left(\frac{2h}{1+e}\right)^2 \frac{\delta\varepsilon'' - \delta\varepsilon'}{\sqrt{2h(1+m)}}.$$

L'altération de la durée de la révolution périodique de la Comète sera donc

$$\sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}(\delta\theta' - \delta\theta'') - \left(\frac{2h}{1+e}\right)^2 \frac{\delta\varepsilon'' - \delta\varepsilon'}{\sqrt{2h(1+m)}},$$

ou

$$\frac{3(t''\delta a'' - t'\delta a')}{2a} - \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}(\delta i'' - \delta i') - \left(\frac{2h}{1+e}\right)^2 \frac{\delta\varepsilon'' - \delta\varepsilon'}{\sqrt{2h(1+m)}},$$

en dénotant par $\delta a'$, $\delta i'$, $\delta a''$ et $\delta i''$ les valeurs de δa, δi qui répondent à $t = t'$ et t''.

SECTION IV.

Application des théories précédentes au calcul des perturbations des Comètes, et en particulier de celle des années 1532 *et* 1661.

On est forcé, dans la théorie des Comètes, de renoncer à l'avantage de parvenir à des formules analytiques qui expriment les inégalités de leur mouvement pour un temps quelconque, telles que celles que l'on trouve pour les inégalités des planètes, et cela vu l'impossibilité d'exprimer en fonctions rationnelles et entières de sinus et cosinus de l'anomalie excentrique de la Comète, qu'on prend pour argument général, soit les coordonnées de la planète troublante, soit la distance mutuelle R des deux astres, qui entre en dénominateur avec l'exposant 3 dans les expressions X, Y, Z. La seule ressource qui reste est de déterminer ces inégalités par parties successives, en partageant l'orbite de la Comète en différentes portions et calculant séparément l'effet des perturbations pour chacune d'elles.

Dans toute la partie inférieure de l'orbite, on emploiera avec succès la méthode ordinaire des quadratures paraboliques, pour laquelle Lagrange

renvoie aux traités de Cotes et de Stirling [1] et dont nous nous occuperons par la suite. Cette méthode ne lui paraît cependant pas suffisante, pour les parties de l'anomalie excentrique relativement auxquelles la quantité R sera assez petite, ce qui arrivera vers les *minima* de distance entre la Comète et la planète; voici celle qu'il indique pour résoudre le problème des perturbations avec l'exactitude désirable dans cette portion de la trajectoire.

Soit u' l'anomalie excentrique répondant au point à partir duquel on veut changer de procédé d'intégration, on fera en général $u = u' + \upsilon$, et tant que υ sera assez petit, on pourra mettre les quantités à intégrer sous la forme rationnelle $(L + M\upsilon + N\upsilon^2 + \text{etc.})\,d\upsilon$; on intégrera de $u = u'$ jusqu'à $u = u''$, en supposant l'arc $u'' - u'$ assez petit, et ainsi de suite. Les différentes quantités qui entrent dans les équations (15) peuvent être exprimées par des fonctions rationnelles et entières de sinus et de cosinus des angles u et $\theta\sqrt{\dfrac{a^3}{\alpha^3}}$, c'est-à-dire de l'anomalie excentrique de la Comète et du moyen mouvement correspondant de la planète [2], ce moyen mouvement étant à celui de la Comète θ en raison de $\sqrt{a^3} : \sqrt{\alpha^3}$, où α représente le grand axe de l'orbite de la planète. Si donc on suppose que ces deux angles varient en même temps des angles contemporains β et γ, chacune des quantités dont il s'agit pourra être représentée par une formule algébrique de la forme

$$L + M\beta + N\gamma + O\beta^2 + P\beta\gamma + Q\gamma^2 + \text{etc.},$$

[1] *Cotes, Harmonia Mensurarum*, etc. edid. R. Smith, Cantabrigiae 1722, et en particulier aux *Opera miscellanea*, qui font suite à cet ouvrage : *de Methodo differentiali Newtoniana*, p. 23 à 33.

Stirling, Methodus differentialis, sive Tractatus de summatione et interpolatione Serierum.

[2] Cela résulte des relations (10) qui deviennent, en raison du système d'axes adopté,

$$x = \frac{a}{2}(\cos.u - f), \qquad y = \sqrt{ah}\,\sin.u, \qquad z = 0,$$

$$r = \frac{a}{2}(1 - f\cos.u), \qquad dt = \sqrt{\frac{a}{2(1+m)}}\,du.$$

dans laquelle les quantités L, M, etc., seront toutes aussi des fonctions entières et rationnelles des mêmes sinus et cosinus. Or $\theta = u - e \sin. u$, donc faisant croître u de β, et θ de $\gamma \sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}}$, on aura

$$\gamma = \sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}} \left\{ (1 - e \cos. u)\beta + \frac{e \sin. u}{2} \beta^2 + \text{etc.} \right\}.$$

Si l'on substitue cette valeur de γ dans la formule précédente, elle prendra cette forme plus simple $L + M\beta + N\beta^2 + \text{etc.}$, dans laquelle les quantités L, M, N, etc. seront pareillement des fonctions, toutes rationnelles et entières, de $\sin. u$, $\cos. u$, $\sin. \theta \sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}}$ et $\cos. \theta \sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}}$, en sorte que ces quantités ne pourront jamais augmenter au delà d'un certain terme ; et il est clair que la formule précédente n'étant poussée que jusqu'au second degré, sera exacte aux quantités près des ordres de β^3 et γ^3.

Si donc on dénote par V une quelconque des quantités dont il s'agit, et que V_0, V_1, V_2 soient les valeurs de V qui répondent à $u = u_0$, u_1 et u_2 ; où $u_1 = u_0 + \beta$ et $u_2 = u_1 + \beta$; il résulte de ce qui précède que pour $u = u_1 + n\beta$ (n étant une fraction), on aura, aux quantités près des ordres de β^3 et γ^3 : $V = V_1 + V_1'n + V_1''n^2$, formule qui pourra servir aussi en faisant n négatif depuis 0 jusqu'à -1.

Or comme $V = V_0$ quand $n = -1$ et $V = V_2$ quand $n = 1$, on aura

$$V_0 = V_1 - V_1' + V_1'', \quad V_2 = V_1 + V_1' + V_1'',$$

d'où

$$V_1' = \frac{V_2 - V_0}{2}, \quad V_1'' = \frac{V_2 - 2V_1 + V_0}{2}.$$

Cela posé, séparons dans les équations différentielles (15) les termes divisés par R^3 des autres, après qu'on y aura remplacé X, Y, Z par leurs valeurs, et représentons en général chacune d'elles par

$$d\Delta = \frac{\mu}{1+m}\left(V + \frac{U}{R^{\frac{3}{2}}}\right) du,$$

où $\overline{R} = R^2$. Qu'on calcule les valeurs de V, U, et R pour trois anomalies excentriques $u = u_0$, u_1 et u_2, dont la commune différence soit β, qu'on en déduise ensuite V_1, V_1'' ainsi que U_1', U_1'', R_1' et R_1'', et qu'on substitue partout dans l'équation précédente $u_1 + \beta n$ à la place de u, on aura, en regardant n comme variable :

$$d\Delta = \frac{\mu}{1+m}\left\{V_1 + V_1'n + V_1''n^2 + \frac{U_1 + U_1'n + U_1''n^2}{(R_1 + R_1'n + R_1''n^2)^{\frac{3}{2}}}\right\} dn.$$

Cette équation, intégrée de $n = -1$ jusqu'à $n = 1$, donnera, aux quantités près de l'ordre $\mu\beta^5$ et $\mu\gamma^5$, la valeur de Δ, ou plutôt l'accroissement de Δ depuis $u = u_0$, jusqu'à $u = u_2 = u_0 + 2\beta$; en sorte que, désignant par Δ_0 et Δ_2 les valeurs de Δ qui répondent à ces deux anomalies, on aura $\Delta_2 - \Delta_0$ égal à l'intégrale du second membre de cette équation prise de $n = -1$ jusqu'à $n = 1$, intégrale que le calcul nous fournit sous la forme (voir note V) :

$$\Delta_2 - \Delta_0 = \frac{\mu\beta}{1+m}\left\{2V_1' + \frac{2}{3}V_1'' + \frac{K+L}{\sqrt{R_2}} - \frac{K-L}{\sqrt{R_0}} + \frac{MP}{2\sqrt{\pm R_1''}}\right\}.$$

Ayant ainsi trouvé la valeur de $\Delta_2 - \Delta_0$, pour une portion d'anomalie excentrique $u_2 - u_0$, on trouvera de même la valeur de $\Delta_4 - \Delta_2$ pour une portion suivante d'anomalie $u_4 - u_2$ et ainsi de suite ; ces différentes valeurs seront exactes aux quantités près de l'ordre $\mu\beta^5$ et $\mu\gamma^5$, β étant égal à $u_2 - u_0$ ou $u_4 - u_2$ et γ étant la partie correspondante de l'anomalie moyenne de la planète. Ajoutant successivement ces valeurs ensemble, on aura la valeur totale de $\Delta_n - \Delta_0$ correspondante à une certaine portion de la trajectoire, entre les valeurs de u_0 et u_n d'anomalie excentrique. Cette portion est, comme nous l'avons dit, celle où la quantité R est assez petite et du même ordre que les différences finies R', R'', ce qui arrivera vers le *minimum* de distance entre les deux astres.

Pour toute la partie supérieure de l'orbite, dans laquelle la distance de la Comète au Soleil surpassera de beaucoup la distance de la planète au Soleil, il sera bien plus avantageux d'employer la méthode exposée à la fin de la section précédente (p. 42). Elle consiste à changer les quantités X, Y, Z des formules (15) en leurs analogues X', Y', Z' et à rétablir ensuite celles-là à la place de celles-ci, pourvu qu'on ajoute en même temps à la

valeur finie de δh par exemple, la quantité $\mu H'' - \mu H'$, qui est la différence des deux valeurs de μH (p. 43), dont l'une $\mu H'$ se rapporte au point où X, Y, Z se changent en X', Y', Z', et dont l'autre $\mu H''$ se rapporte au point où X', Y', Z' redeviennent X, Y, Z. Or ce procédé offre un très-grand avantage : en effet les expressions X', Y', Z', qui entrent dans les formules (16) et sont fonctions des coefficients différentiels de $\frac{1}{S} - \frac{1}{R}$, deviennent très-petites quand la distance r est beaucoup moindre que ρ. Donc lorsque $\frac{\rho}{r}$ sera devenu $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$, on pourra, dans la première approximation, négliger ces quantités comme nulles, ou si l'on veut absolument y avoir égard, il suffira d'y tenir compte des premiers termes. Dans ce cas on pourra en toute sûreté employer la méthode ordinaire des quadratures mécaniques pour intégrer les quantités $d\delta h$, $d\delta a$, etc., mais on pourra aussi les intégrer analytiquement, du moins par approximation : voici un abrégé sommaire de la méthode que Lagrange propose à cet effet.

Si dans les valeurs (16) des différentielles $d\delta h$, $d\delta a$, $d\delta f$, etc., on remplace x par $r\cos.\varphi$, y par $r\sin.\varphi$ et z par zéro, elles se trouveront composées de différents termes de la forme

$$\frac{\Sigma\cos.^m\varphi.\sin.^n\varphi.d\varphi}{r^p},$$

où m, n, p sont des nombres entiers et positifs ou zéro, et Σ une fonction rationnelle et entière de ξ, η, ζ. (Exceptons seulement les termes de la valeur de $d\delta i$ qui sont multipliés par l'angle t, et que nous examinerons plus loin). Et comme $r = \frac{2h}{1 + f\cos.\varphi}$, en substituant cette valeur dans la formule précédente, on n'aura plus que des termes de la forme

$$\Sigma\cos.^\mu\varphi.\sin.^\nu\varphi.d\varphi.$$

Qu'on substitue maintenant dans Σ, à la place de ξ, η, ζ, leurs valeurs en sinus et cosinus de $\theta\sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}}$ que je représenterai par υ, on pourra négliger l'effet de l'excentricité de l'orbite de la planète, ou y avoir égard, en ajoutant au demi-grand axe et à l'anomalie moyenne les premiers termes

de la correction elliptique du rayon vecteur et de l'équation du centre. La quantité Σ se trouvera sous la forme

$$A + B \sin. \upsilon + C \cos. \upsilon + D \sin. 2\upsilon + \text{etc.};$$

et les différentielles $d\delta h$, $d\delta a$, $d\delta f$, etc. se trouveront composées de deux espèces de termes, les uns indépendants de l'angle υ, de la forme

$$K \cos.^{\mu}\varphi. \sin.^{\nu}\varphi. d\varphi,$$

et qui s'intégreront immédiatement; les autres affectés de sinus ou cosinus de l'angle υ, de la forme

$$L \cos.^{\mu}\varphi. \sin.^{\nu}\varphi. \sin. N\upsilon. d\varphi, \text{ ou } M \cos.^{\mu}\varphi. \sin.^{\nu}\varphi. \cos. N\upsilon. d\varphi,$$

(où N est un nombre entier), et qui ne sont intégrables par aucune méthode; mais dans la partie supérieure de l'orbite que nous considérons, ces termes sont considérablement plus petits que les précédents, en sorte qu'on pourra le plus souvent les négliger sans scrupule.

Remarquons en effet que $d\varphi = \frac{d\upsilon.\sqrt{\alpha^3 h}}{2r^2}$. Si on substitue cette valeur dans les termes dont il s'agit, et qu'on fasse pour abréger

$$\sqrt{\alpha^3 h}\,\frac{\cos.^{\mu}\varphi. \sin.^{\nu}\varphi.}{2N.r^2} = \Phi,$$

ils deviendront $-\Phi\, d\cos. N\upsilon$ et $\Phi\, d\sin. N\upsilon$, dont les intégrales sont

$$-\Phi \cos. N\upsilon + \int \cos. N\upsilon\, d\Phi,$$

$$\Phi \sin. N\upsilon - \int \sin. N\upsilon\, d\Phi.$$

$\int \cos. N\upsilon\, d\Phi$ et $\int \sin. N\upsilon\, d\Phi$ représentent les aires des courbes qui auraient Φ pour abscisse et $\cos. N\upsilon$ ou $\sin. N\upsilon$ pour ordonnée. Abstraction faite du signe, l'aire totale sera toujours moindre que le produit de l'abscisse totale par la plus grande ordonnée qui est l'unité; de sorte que dénotant par (Φ) cette abscisse totale, on aura $\pm(\Phi)$ pour les deux limites entre lesquelles seront nécessairement renfermées les aires en question. — Or dans la partie supérieure de l'orbite, $r > \frac{\alpha}{2}$; la distance périhélie $\frac{2h}{1+e} = h$ à

très-peu près, et pour la plupart des Comètes cette distance est moindre que l'unité, en sorte que la quantité $\frac{\sqrt{\alpha^5 h}}{2Nr^2}$ sera nécessairement fort petite. Par conséquent les quantités Φ et (Φ) seront généralement beaucoup plus petites que la valeur de $\int \cos.^{\mu}\varphi.\sin.^{\nu}\varphi.d\varphi$.

On détermine aisément la valeur de (Φ) pour toute la partie supérieure de l'orbite, en supposant qu'elle commence au point où $\varphi=\varphi'$ et $r=r'$, et finisse au point semblablement situé au delà de l'aphélie, où $\varphi=360°-\varphi'$ et $r=r'$; cette valeur différera suivant que l'exposant ν de sin. φ sera de degré impair ou pair.

Si les limites $\pm(\Phi)$ n'étaient pas assez petites, en sorte qu'on ne crût pas pouvoir négliger les quantités enfermées entre ces limites, on pourra les resserrer davantage, en mettant les différentielles $\cos.N\upsilon d\Phi$ et $\sin.N\upsilon d\Phi$ sous la forme $\frac{d\Phi}{d\varphi}\cos.N\upsilon d\varphi$, et $\frac{d\Phi}{d\varphi}\sin.N\upsilon d\varphi$. Elles se changent alors par la substitution de $\frac{d\upsilon\sqrt{\alpha^5 h}}{2r^2}$, et en posant $\frac{\sqrt{\alpha^5 h}}{2Nr^2}\cdot\frac{d\Phi}{d\varphi}=\Phi'$, en celles-ci :

$$-\Phi' d\cos.N\upsilon \quad \text{et} \quad \Phi' d\sin.N\upsilon,$$

dont les intégrales sont

$$-\Phi'\cos.N\upsilon+\int\cos.N\upsilon d\Phi' \quad \text{et} \quad \Phi'\sin.N\upsilon-\int\sin.N\upsilon d\Phi',$$

et aux seconds termes desquelles on pourra appliquer les mêmes raisonnements qu'aux précédents, en sorte qu'on aura $\pm(\Phi')$ pour les limites entre lesquelles ces valeurs sont comprises. Or on voit facilement que Φ' est nécessairement beaucoup moindre que Φ, quand r^2 est assez grand vis à vis de $\sqrt{\alpha^5 h}$. On commettra donc, en négligeant les intégrales renfermées entre ces dernières limites, une erreur bien plus petite; et on voit par là comment on pourrait pousser l'approximation plus loin et diminuer à volonté l'erreur résultant de l'omission desdites intégrales.

Il reste encore à voir comment s'effectuera l'intégration pour le terme de $d\delta i$ qui renferme le temps comme facteur. Si dans les formules (15), on remplace X, Y, Z par X', Y', Z', comme en posant

$\left(\frac{1}{S}-\frac{1}{R}\right)=P$ (1), on a $X'=\frac{dP}{dx}$, $Y'=\frac{dP}{dy}$, $Z'=\frac{dP}{dz}$,

la différentielle $d\delta a$ devient de la forme $-\frac{\mu}{1+m}a^2DP$, en désignant par la caractéristique D une différentielle partielle, prise en faisant varier seulement x, y, z, coordonnées de la Comète. Si l'on remplace dans DP, ξ, η, ζ et ρ par leurs valeurs en sin. υ et cos. υ, on obtiendra

$$DP=dQ+\sin.\upsilon.dR+\cos.\upsilon.dS+\sin.2\upsilon.dT+\cos.2\upsilon.dV+\text{etc.},$$

où Q, R, S, T, V, etc. sont des fonctions rationnelles et entières de x, y, z, et dont chaque terme sera divisé par une puissance de r, dont l'exposant surpassera de trois unités ou plus, la somme des dimensions de x, y, z au numérateur. On aura ainsi

$$d\delta\alpha=-\frac{\mu}{1+m}a^2\left\{dQ+\sin.\upsilon dR+\cos.\upsilon dS+\sin.2\upsilon dT+\text{etc.}\right\},$$

forme qui coïncide avec celle de la p. 49, pourvu qu'on y fasse $x=r\cos.\varphi$, $y=r\sin.\varphi$ et $z=0$, et qui peut s'intégrer facilement.

Venons maintenant au terme $3t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}}d\delta a$ de la valeur de $d\delta i$. En y substituant d'abord pour $d\delta a$ la quantité $-\frac{\mu}{1+m}a^2dQ$, indépendante de υ, on aura la différentielle $-3\mu\sqrt{\frac{2}{a(1+m)}}tdQ$, dont l'intégrale est $-3\mu\sqrt{\frac{2}{a(1+m)}}(tQ-\int Qdt)$.

Or $dt=\frac{r^2d\varphi}{\sqrt{2h(1+m)}}$, donc, comme dans Q les exposants négatifs de r surpassent d'au moins trois unités la somme des exposants positifs de x, y, z, en remplaçant x, y, z par leurs valeurs en r et en φ, et r par

(1) $P=\frac{\rho^2}{2r^3}-\frac{3(x\xi+y\eta+z\zeta)^2}{2r^5}+\frac{3(x\xi+y\eta+z\zeta)\rho^2}{2r^5}-\frac{5(x\xi+y\eta+z\zeta)^3}{2r^7}$.

$\frac{2h}{1+f\cos.\varphi}$, Rr^2 deviendra une fonction rationnelle et entière de $\sin.\varphi$ et $\cos.\varphi$, et $Rdt = \frac{Rr^2 d\varphi}{\sqrt{2h(1+m)}}$ sera tout à fait intégrable.

L'autre partie de $d\delta a$ est composée de termes de la forme

$$-\frac{\mu a^2}{1+m}\cos.^{\mu}\varphi.\sin.^{\nu}\varphi.\left.\begin{matrix}\sin.\\ \cos.\end{matrix}\right\}N\upsilon.d\varphi.$$

Les termes correspondants de $d\delta i$ seront de la forme

$$-3\mu\sqrt{\frac{2}{a(1+m)}}\,t\cos.^{\mu}\varphi.\sin.^{\nu}\varphi.\left.\begin{matrix}\sin.\\ \cos.\end{matrix}\right\}N\upsilon.d\varphi.$$

A l'imitation de ce qui a été fait plus haut, on substituera dans ces différentielles $\frac{d\upsilon\sqrt{\alpha^3 h}}{dt}$ au lieu de $d\varphi$, et faisant (à cause de $dt = \sqrt{\frac{\alpha^3}{8(1+m)}}\,d\upsilon$),

$$V = \int t\sin.N\upsilon.N\,d\upsilon = -t\cos.N\upsilon + \sqrt{\frac{\alpha^3}{8(1+m)}}\cdot\frac{\sin.N\upsilon}{N},$$

$$W = \int t\cos.N\upsilon.N\,d\upsilon = t\sin.N\upsilon - \sqrt{\frac{\alpha^3}{8(1+m)}}\cdot\frac{\cos.N\upsilon}{N},$$

on aura ces transformées ΦdV et ΦdW, en conservant la valeur de Φ de la p. 50.

Intégrant par parties on aura $\Phi V - \int V d\Phi$ et $\Phi W - \int W d\Phi$, et on démontrera par un raisonnement semblable à celui d'alors, que les valeurs de $\int V d\Phi$ et $\int W d\Phi$ sont comprises entre $\pm(V)(\Phi)$ et $\pm(W)(\Phi)$, en désignant par (V) et (W) les plus grandes valeurs de V et W, dans la partie supérieure de l'orbite. Or les maxima de V et W ayant lieu lorsque $dV = 0$ ou $dW = 0$, c'est-à-dire quand $\sin.N\upsilon = 0$ ou $\cos.N\upsilon = 0$, il s'ensuit que les plus grandes valeurs des quantités V et W seront, abstraction faite du signe, égales à t. Si donc on désigne par (t) la valeur de t pour le point où finit cette partie de l'orbite, on aura (V) et $(W) = (t)$, et les valeurs des intégrales $\int V d\Phi$ et $\int W d\Phi$, pour toute la partie supérieure de l'orbite, seront renfermées entre ces limites $\pm(t)(\Phi)$.

Si on ne les jugeait pas assez rapprochées, surtout parce que la valeur de (t) peut être assez considérable, on pourrait les resserrer davantage par une méthode analogue à celle de la p. 51.

Il résulte de tout ceci, que dans la partie supérieure de l'orbite, les perturbations peuvent être déterminées analytiquement, sinon par des formules rigoureuses, du moins par des formules très-approchées et dont on peut pousser l'approximation aussi loin qu'on veut.

Le programme de l'Académie des sciences en 1778, n'exigeant pas que les concurrents donnassent des résultats numériques du calcul des perturbations des Comètes, Lagrange se borne à indiquer la marche à suivre pour appliquer ses méthodes à la Comète des années 1532 et 1661, dont les astronomes attendaient le retour vers 1789 ou 1790. Cette Comète avait été observée par Hévélius lors de sa dernière apparition, et par Appien lors de la précédente. Halley calcula les deux orbites paraboliques résultant de leurs observations. On peut supposer que les éléments qu'il a obtenus pour 1661, sont ceux de l'orbite non altérée, et partir de là comme base pour déterminer le grand axe par la troisième loi de Kepler. La valeur ainsi obtenue serait tout au plus diminuée d'un centième, si on voulait la déterminer dans l'hypothèse elliptique, mais elle est entachée de l'erreur résultant des perturbations. Or pour déterminer ces perturbations nous avons besoin de la valeur du grand axe, nous prendrons néanmoins pour cet effet la valeur approximative obtenue, l'erreur commise par cette supposition n'étant que de l'ordre des carrés des forces perturbatrices.

Si maintenant on considère le retour de la Comète au périhélie, on aura l'époque du futur passage, en ajoutant à celle de 1661 l'intervalle écoulé entre les deux précédents passages et tenant compte convenablement du mouvement du périhélie. Cette détermination serait exacte, même en ayant égard aux perturbations, si les deux révolutions successives étaient parfaitement semblables. Mais si l'altération de ces deux périodes n'est pas la même, il est clair qu'il faudra ajouter au temps déterminé ci-dessus, l'excès de l'altération de la seconde période sur l'altération de la première. Cet excès se détermine par la formule de la p. 45. En marquant de un, deux, trois traits les quantités répondant aux trois périhélies consécutifs de 1532, 1661 et 1789, on aura cette correction du temps égale à

$$\frac{3(t'''\delta a'''-2t''\delta a''+t'\delta a')}{2a}-\sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}(\delta i'''-2\delta i''+\delta i')-\left(\frac{2h}{1+e}\right)^2\frac{\delta g'''-2\delta g''+\delta g'}{e\sqrt{2h(1+m)}},$$

où l'on a seulement remplacé $\delta\varepsilon$ par son équivalent $\frac{\delta g}{e}$. Cette formule peut se simplifier, si l'on prend pour origine du temps l'époque du passage de 1661, et elle fournit facilement l'altération du temps périodique de la Comète, qu'il est le plus important de déterminer.

Quant aux altérations des autres éléments, on les déterminera aisément par l'intégration des formules (15), en faisant commencer les intégrales au périhélie de 1661 et les étendant jusqu'à celui de 1789 ou 1532, suivant qu'on voudra déterminer ces altérations pour la dernière période de la Comète ou pour la période précédente.

Le calcul entier de ces perturbations ne fut pas exécuté sur les directions de Lagrange et c'eût été peine perdue, vu qu'aucune Comète ne fut aperçue en 1790, qui pût être assimilée à celle de 1661.

CHAPITRE TROISIÈME.

Théorie des Comètes de La Place : Examen du cas où elles s'approchent très-près des planètes troublantes ; Quadratures mécaniques.

Comme nous l'avons déjà dit, le IXme livre de la *Mécanique Céleste* est une vraie reproduction de la pièce de Lagrange que nous venons d'examiner en détail. Il convient cependant de nous y arrêter quelque temps, et de passer en revue ses formules des variations des éléments, auxquelles le génie pratique de La Place a donné la forme la plus commode pour le calcul de ce genre de perturbations, et qui renferment les notations que nous emploierons constamment dans notre travail.

SECTION Ire.

Théorie générale des perturbations des Comètes.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires, et r le rayon vecteur de la Comète m, rapportés au centre du Soleil ; soient m' la masse de la planète perturbatrice, r' son rayon vecteur et x', y', z' ses trois coordonnées rapportées aux mêmes axes et à la même origine que les premières. Si l'on nomme ρ la distance mutuelle de la planète et de la Comète, en sorte qu'on ait

$$\rho = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2},$$

que, pour abréger, on fasse

$$R = m' \left\{ \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} - \frac{1}{\rho} \right\},$$

R étant ce que l'on est convenu d'appeler la fonction perturbatrice (voyez

Méc. Cél., liv. II, p. 262), les trois équations du mouvement troublé de la Comète autour du Soleil seront :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} + \frac{dR}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3} + \frac{dR}{dy} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{r^3} + \frac{dR}{dz} = 0,$$

où l'on suppose que la masse de la Comète est nulle relativement à celle du Soleil. Cette hypothèse a été justifiée par toutes les tentatives faites jusqu'ici pour déterminer cette masse.

Dans le cas où R est nul, ces équations appartiennent à une orbite elliptique ; mais la valeur de R étant très-petite, si l'on nomme δx, δy, δz les altérations qu'elle produit dans les valeurs des coordonnées relatives à l'orbite elliptique, et si l'on néglige les carrés et les produits de ces altérations, les trois équations précédentes donneront les suivantes :

$$(a)\qquad \begin{aligned} 0 &= \frac{d^2\delta x}{dt^2} + \frac{\delta x}{r^3} - \frac{3x\delta r}{r^4} + \frac{dR}{dx}, \\ 0 &= \frac{d^2\delta y}{dt^2} + \frac{\delta y}{r^3} - \frac{3y\delta r}{r^4} + \frac{dR}{dy}, \\ 0 &= \frac{d^2\delta z}{dt^2} + \frac{\delta z}{r^3} - \frac{3z\delta r}{r^4} + \frac{dR}{dz}. \end{aligned}$$

Il suffit de satisfaire à ces équations, car en réunissant les valeurs de δx, δy, δz, qui y satisfont, aux valeurs de x, y, z relatives au mouvement elliptique et qui renferment six constantes arbitraires, on aura les intégrales complètes des trois équations différentielles primitives du mouvement de la Comète.

Ici La Place indique les mêmes limites des perturbations des Comètes que celles données par Lagrange (voy. p. 24 et suivantes) : dans la portion inférieure de leur orbite, leur mouvement peut être considéré comme elliptique, et dans la portion supérieure, on peut faire usage d'une sim-

plification remarquable (p. 26), qui permet de représenter ce mouvement avec une grande approximation. Nous y reviendrons en peu de mots en parlant du calcul propre à ces régions de l'orbite, occupons-nous pour le moment des expressions générales les plus convenables à donner aux variations des éléments.

Prenons pour plan fixe des xy, celui de l'orbite primitive de la Comète, ce qui permet de négliger le carré de z comme étant de l'ordre du carré de la force perturbatrice. En faisant

$$h = e \sin. \varpi\,, \qquad l = e \cos. \varpi\,,$$

e étant l'excentricité de l'orbite et ϖ la longitude du périhélie, comptée de l'axe des x, on aura (note VI) :

$$dh = dx \left\{ x \frac{d\mathrm{R}}{dy} - y \frac{d\mathrm{R}}{dx} \right\} + (xdy - ydx) \frac{d\mathrm{R}}{dx}\,,$$

$$dl = dy \left\{ y \frac{d\mathrm{R}}{dx} - x \frac{d\mathrm{R}}{dy} \right\} + (ydx - xdy) \frac{d\mathrm{R}}{dy}\,.$$

Ces deux équations donnent les valeurs de de et $d\varpi$, car on a

$$de = dh \sin. \varpi + dl \cos. \varpi\,,$$
$$ed\varpi = dh \cos. \varpi - dl \sin. \varpi\,;$$

et si pour plus de simplicité, on prend la ligne même des apsides pour axe des x, on aura

$$de = dl\,, \qquad ed\varpi = dh.$$

Or on sait que les équations du mouvement elliptique donnent :

$$\int ndt + \varepsilon - \varpi = u - e \sin. u\,,$$

(b)

$$r = a(1 - e \cos. u)\,,$$

$$\mathrm{tang.}\, \tfrac{1}{2}(v - \varpi) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, \mathrm{tang.}\, \tfrac{1}{2} u\,.$$

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}\,.$$

$\int ndt + \varepsilon$ est la longitude moyenne de la Comète, $\int ndt + \varepsilon - \varpi$ son

anomalie moyenne, $v - \varpi$ son anomalie vraie, et u son anomalie excentrique. Si on prend la ligne des apsides pour axe des abscisses, et qu'on compte les x à partir du foyer vers le périhélie, on aura

$$x = r\cos.(v - \varpi), \qquad y = r\sin.(v - \varpi),$$

et par ce qui précède,

$$x = a(\cos.u - e), \qquad y = a\sqrt{1-e^2}\sin.u.$$

Si l'on nomme ensuite λ l'inclinaison de l'orbite de la planète m' sur celle de la Comète, et θ' la longitude de son nœud ascendant comptée de l'axe des apsides; si de plus on désigne par v' l'angle que le rayon r' fait avec la ligne des nœuds, on aura

$$(c) \qquad \begin{aligned} x' &= r'\cos.\theta'\cos.v' - r'\sin.\theta'\cos.\lambda.\sin.v', \\ y' &= r'\sin.\theta'\cos.v' + r'\cos.\theta'\cos.\lambda.\sin.v', \\ z' &= r'\sin.\lambda.\sin.v'. \end{aligned}$$

Or la valeur de R donne

$$\frac{d\mathrm{R}}{dx} = m'\left\{\frac{x'}{r'^3} - \frac{(x'-x)}{\rho^3}\right\}, \qquad \frac{d\mathrm{R}}{dy} = m'\left\{\frac{y'}{r'^3} - \frac{(y'-y)}{\rho^3}\right\}.$$

Remplaçant ces expressions dans celles de dh et dl, on en déduira

$$(d) \qquad \begin{aligned} de &= -m'.adu\sqrt{1-e^2}.\cos.u(xy'-x'y)\left\{\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right\} \\ &\quad - m'.a^2du\sqrt{1-e^2}.(1-e\cos.u)\left\{\frac{y'}{r'^3} - \frac{y'-y}{\rho^3}\right\}; \\ ed\varpi &= -m'.adu\sin.u.(xy'-x'y)\left\{\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right\} \\ &\quad + m'.a^2du\sqrt{1-e^2}.(1-e\cos.u)\left\{\frac{x'}{r'^3} - \frac{x'-x}{\rho^3}\right\}; \end{aligned}$$

équations qui fournissent les variations de l'excentricité et du périhélie.

L'équation des forces vives donne par le n° 64 du IIme livre de la *Mécanique Céleste*, en observant que μ est à très-peu près égal à l'unité,

$$d.\frac{1}{a} = 2d'\mathrm{R};$$

la caractéristique différentielle d' ne se rapportant qu'aux seules coordonnées de m. Or en négligeant le carré de z, on a

$$d'\text{R} = m'\,\frac{x'dx + y'dy}{r'^3} - m'\,\frac{(x'-x)\,dx + (y'-y)\,dy + (z'-z)\,dz}{\rho^3},$$

et par conséquent,

$$d'\text{R} = -m'adu \sin. u \left\{ \frac{x'}{r'^3} - \frac{x'-x}{\rho^3} \right\}$$
$$+ m'adu\sqrt{1-e^2}.\cos. u \left\{ \frac{y'}{r'^3} - \frac{y'-y}{\rho^3} \right\};$$

d'où l'on tire

$$da = 2m'a^3 du \sin. u \left(\frac{x'}{r'^3} - \frac{x'-x}{\rho^3} \right)$$

(e)

$$-2m'a^3 du\sqrt{1-e^2}.\cos. u \left(\frac{y'}{r'^3} - \frac{y'-y}{\rho^3} \right).$$

Et par suite, comme la variation du moyen mouvement $dn = 3\,and'\text{R}$,

(f)
$$\int ndt = \text{N}t + 3\int \left(ndt \int ad'\text{R}\right),$$

N étant une constante. On a ainsi de plus l'expression de l'altération du demi-grand axe a et du moyen mouvement n de la Comète.

Les variations du nœud et de l'inclinaison s'obtiennent en différentiant les équations des aires, dont les constantes c, c', c'', sont liées avec ces éléments par les équations (*Méc. Cél.*, livre II, n° 19) :

$$\text{tang}.\,\varphi = \frac{\sqrt{c'^2 + c''^2}}{c}, \quad \text{tang}.\,\theta = \frac{c''}{c'};$$

où l'on appelle φ l'inclinaison de l'orbite sur le plan des xy, et θ la longitude de son nœud ascendant. Ces constantes sont encore assujetties à la relation

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = a(1-e^2).$$

Par le n° 64 du II[me] livre de la *Méc. Cél.*, on a

$$dc = dt\left(y\,\frac{d\mathrm{R}}{dx} - x\,\frac{d\mathrm{R}}{dy}\right),$$

$$dc' = dt\left(z\,\frac{d\mathrm{R}}{dx} - x\,\frac{d\mathrm{R}}{dz}\right),$$

$$dc'' = dt\left(z\,\frac{d\mathrm{R}}{dy} - y\,\frac{d\mathrm{R}}{dz}\right).$$

Si l'on prend pour plan des xy celui de l'orbite primitive, c' et c'' sont, ainsi que z, de l'ordre des forces perturbatrices ; en négligeant donc le carré de ces forces et substituant pour R sa valeur, on aura

$$\frac{dc'}{dt} = -\,m'a\,(\cos. u - e).\,z'\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right),$$

$$\frac{dc''}{dt} = -\,m'a\sqrt{1-e^2}\sin. u.\,z'\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right),$$

$$c = \sqrt{a(1-e^2)}\,;$$

et comme $ndt = du\,(1 - e\cos. u)$ et $n^2 = \dfrac{1}{a^3}$, on a

$$(g)\quad \begin{cases} \dfrac{dc'}{c} = -\,\dfrac{m'.a^2du}{\sqrt{1-e^2}}\,(1 - e\cos. u)\,(\cos. u - e)\,z'\left(\dfrac{1}{r'^3} - \dfrac{1}{\rho^3}\right), \\[2ex] \dfrac{dc''}{c} = -\,m'.a^2du\,(1 - e\cos. u)\,\sin. u.\,z'\left(\dfrac{1}{r'^3} - \dfrac{1}{\rho^3}\right); \end{cases}$$

ou

$$\frac{dc'}{c} = -\,\frac{m'.xr.du}{\sqrt{1-e^2}}\,z'\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right),$$

$$\frac{dc''}{c} = -\,m'.yr.du\,z'\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right),$$

équations qui détermineront pour un instant quelconque l'inclinaison de l'orbite sur le plan fixe et la position de ses nœuds.

Reste à donner la variation du sixième élément, la longitude de l'époque ε. La première équation (b) donne en différentiant, dans le cas de l'ellipse invariable,

$$ndt = du\,(1 - e\cos. u).$$

Dans celui de l'ellipse variable on doit avoir la même équation, ce qui donne

$$d\varepsilon - d\varpi = du\,(1 - e\cos. u) - de \sin. u\,;$$

u ne variant ici qu'à raison des variations de e et de ϖ, au lieu que dans le premier cas, il ne varie qu'à raison du temps t. La troisième des équations (b) donne, en ne faisant varier que e et ϖ,

$$-\frac{d\varpi}{\cos.^2 \frac{1}{2}(v - \varpi)} = \frac{du}{\cos.^2 \frac{1}{2} u}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} + \frac{2\,de.\tang. \frac{1}{2} u}{(1-e)\sqrt{1-e^2}}.$$

En substituant pour $\cos.^2 \frac{1}{2}(v - \varpi)$, sa valeur donnée par la même équation, on aura

$$du = -\frac{d\varpi\,(1 - e\cos. u)}{\sqrt{1-e^2}} - \frac{de.\sin. u}{1-e^2},$$

d'où l'on tire

$$(h) \qquad d\varepsilon - d\varpi = -\frac{d\varpi\,(1 - e\cos. u)^2}{\sqrt{1-e^2}} - \frac{de.\sin. u\,(2 - e^2 - e\cos. u)}{1-e^2},$$

équation qui détermine $d\varepsilon - d\varpi$ et par conséquent la valeur de $d\varepsilon$.

Nous avons déjà vu, p. 43, que le point le plus important de la théorie des Comètes est la détermination de l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux de ses retours consécutifs au périhélie; voici comment La Place le détermine. Il suppose une Comète ayant déjà passé deux fois à son périhélie et désigne par T l'intervalle compris entre ces deux passages. Appelant N son moyen mouvement elliptique pendant le même espace de temps, il peut se déterminer en posant $\mathrm{NT} = 2\pi$. Or on a par ce qui précède, en intégrant l'équation $dn = 3\,and'\mathrm{R}$,

$$n = \mathrm{N}(1 + 3a\int d'\mathrm{R}).$$

Si l'on fait commencer l'intégrale $\int d'\mathrm{R}$ à l'instant du premier passage de la Comète au périhélie, où nous fixons l'origine du temps t, on pourra supposer

$$n = \mathrm{N}\left\{1 + \delta q + 3a\int d'\mathrm{R}\right\},$$

où δq est une arbitraire qui représente la portion de n résultant de l'effet

des perturbations à l'origine du temps, et qui se déterminera de la manière suivante. Appelons ζ l'anomalie moyenne de la Comète, on aura dans le mouvement elliptique (p. 58)

$$\zeta = \int ndt + \varepsilon - \varpi,$$

et dans le mouvement troublé

$$\zeta = Nt(1 + \delta q) + 3a.\int(Ndt.\int d'R) + \varepsilon - \varpi + \delta\varepsilon - \delta\varpi.$$

$\delta\varepsilon$ et $\delta\varpi$ sont les variations de la longitude de l'époque et de celle du périhélie, depuis le passage au périhélie. A cet instant $\varepsilon - \varpi$ est nul puisque $t = 0$ et $\zeta = 0$. De plus on a supposé que pour $t = T$, $\zeta = 2\pi$ et $NT = 2\pi$; donc l'équation précédente devient

$$0 = \delta\varepsilon - \delta\varpi + \delta q.NT + 3a.\int(Ndt.\int d'R),$$

les variations $\delta\varepsilon$ et $\delta\varpi$ ainsi que la double intégrale étant étendues depuis $t = 0$ jusqu'à $t = T$. On en tirera la valeur de δq et par conséquent pour un instant quelconque celle de n, qui fournit le demi-grand axe par la relation $n^2 = a^{-3}$.

Soit N' la valeur de n, à l'instant du second passage au périhélie, prenons cet instant pour l'origine du temps t. Nous aurons

$$\zeta = N't + \delta\varepsilon - \delta\varpi + 3a_1\int(N'dt.\int d'R),$$

$\delta\varepsilon$ et $\delta\varpi$ commençant ici, ainsi que les intégrales, à l'instant du second passage au périhélie et a_1 étant le demi-grand axe de l'orbite à cette époque. Les valeurs de ϖ, ε, e seront déterminées par les observations de la Comète faites à la même époque. Appelons T' l'intervalle inconnu du second passage au périhélie au troisième, qui est à venir. A ce dernier instant $\zeta = 2\pi$, et par conséquent

$$N'T' + \delta\varepsilon - \delta\varpi + 3a_1\int(N'dt.\int d'R) = 2\pi;$$

les valeurs de $\delta\varepsilon$ et $\delta\varpi$ s'étendant comme les intégrales depuis $t = 0$ jusqu'à $t = T'$. Cette équation déterminera T'. Observons seulement qu'on peut en faire disparaître les doubles intégrales, car

$$3a_1\int(N'dt.\int d'R) = 3N't.\int a_1 d'R - 3a_1\int N't\, d'R.$$

En marquant donc d'un trait horizontal placé au dessus, les quantités étendues depuis le premier périhélie jusqu'au second, et d'un double trait celles qui s'étendent depuis le second jusqu'au troisième, l'expression précédente de n donnera, à cause de

$$\delta q = \frac{\delta\varpi - \delta\varepsilon - 3\,aNt\int d'R + 3\,a\int Nt.\,d'R}{NT},$$

la valeur suivante :

$$n = N + \frac{\delta\varpi - \delta\varepsilon - 3\,aNt\int d'R + 3\,a\int Nt.\,d'R}{T} + 3\,aN\int d'R,$$

ou intégrant entre o et T et remarquant que pour $t = T$, on a posé $n = N'$, on obtient, à cause de $NT = 2\pi$,

$$N'T = 2\pi - \overline{\delta\varepsilon} + \overline{\delta\varpi} + 3\,a.\overline{\int Nt.\,d'R}.$$

Cette équation déterminera N' et par conséquent a_1. On aura ensuite

$$(i)\qquad \begin{aligned} N'(T'-T) = \overline{\delta\varepsilon} - \overline{\overline{\delta\varepsilon}} - \overline{\delta\varpi} + \overline{\overline{\delta\varpi}} - 3\,N'T'.\overline{\overline{\int a_1 d'R}}. \\ - 3\,a\overline{\int Nt.d'R} + 3\,a_1\overline{\overline{\int N't.d'R}}; \end{aligned}$$

équation qui fournira la différence $T' - T$ des deux révolutions anomalistiques de la Comète.

On pourra, au moyen des formules qui précèdent, déterminer les altérations de tous les éléments elliptiques d'une Comète pendant une révolution anomalistique entière, c'est-à-dire pendant le temps qui s'écoule entre deux retours consécutifs au périhélie, et cela en employant les quadratures mécaniques. L'analyse fournit pour cet objet divers moyens dont nous dirons quelques mots plus loin. Mais les calculs que cette méthode exige sont immenses quand on veut obtenir un degré d'approximation suffisant ; il convient donc de borner l'emploi des quadratures à la partie des perturbations, qui ne peuvent être déterminées d'aucune autre matière dans l'état actuel de l'analyse, et de profiter de toutes les circonstances favorables que peut présenter le mouvement, ordinairement très-excentrique de la Co-

mète, pour déterminer ses perturbations dans la partie supérieure de l'orbite, par une méthode d'intégration plus rapide.

Si la Comète est beaucoup plus loin du Soleil que la planète, en réduisant la fonction perturbatrice R en une série descendante par rapport à r, on aura

$$R = -\frac{m'}{r} - m'(xx' + yy' + zz')\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right) + R';$$

où R' ne renferme que des termes de l'ordre $\frac{m'}{r^4}$ ou d'ordres inférieurs, et est par conséquent très-petit. Si on néglige R', et qu'on se borne aux premiers termes de la valeur de R, d'après la page 26 les perturbations de la Comète seront représentées en supposant

$$(k) \qquad \delta x = m'x' + \tfrac{1}{3}m'x, \quad \delta y = m'y' + \tfrac{1}{3}m'y, \quad \delta z = m'z' + \tfrac{1}{3}m'z,$$

en sorte qu'on en obtient une expression analytique. Développons par ce moyen les variations correspondantes des éléments de l'orbite.

On a (note VI) dans le mouvement elliptique, en négligeant le carré de z, l'équation

$$o = h + y\left(\frac{1}{r} - \frac{dx^2}{dt^2}\right) + \frac{xdxdy}{dt^2}.$$

En la faisant varier par rapport à la caractéristique δ, on aura

$$o = \delta h + \delta y\left\{\frac{1}{r} - \frac{dx^2}{dt^2}\right\} - y\left\{\frac{\delta r}{r^2} + \frac{2dxd\delta x}{dt^2}\right\} + \frac{xdxd\delta y}{dt^2} + \frac{xd\delta xdy}{dt^2} + \delta x\,\frac{dxdy}{dt^2}.$$

Si l'on substitue pour δx, δy, δz leurs valeurs précédentes, on aura

$$\delta h = m'\left\{y\,\frac{dx^2}{dt^2} - \frac{xdxdy}{dt^2}\right\} - m'y'\left\{\frac{1}{r} - \frac{dx^2}{dt^2}\right\} + m'y\,\frac{xx' + yy'}{r^3}$$
$$+ \frac{2m'ydxdx'}{dt^2} - \frac{m'xdxdy'}{dt^2} - \frac{m'xdydx'}{dt^2} - \frac{m'x'dxdy}{dt^2},$$

expression qui, augmentée d'une constante arbitraire, représente l'altération de h due à la partie de R indépendante de R'. Si l'on substitue dans cette valeur de δh, $h + \frac{y}{r}$ au lieu de $y\,\frac{dx^2}{dt^2} - \frac{xdxdy}{dt^2}$, d'après l'équation ci-dessus, on obtient :

$$(m)\quad \begin{aligned}\delta h = m'\left(h+\frac{y}{r}\right) - m'x\,\frac{(xy'-yx')}{r^3} - \frac{m'dx'(xdy-ydx)}{dt^2}\\ - m'\,\frac{dx(xdy'-y'dx+x'dy-ydx')}{dt^2}.\end{aligned}$$

Si l'on change dans cette équation h en l, x en y, x' en y', et réciproquement, on aura la variation de l due à la partie de R indépendante de R' :

$$(n)\quad \begin{aligned}\delta l = m'\left(l+\frac{x}{r}\right) + m'y\,\frac{xy'-x'y}{r^3} + m'dy'\,\frac{xdy-ydx}{dt^2}\\ + m'dy\,\frac{xdy'-y'dx+x'dy-ydx'}{dt^2}.\end{aligned}$$

Les variations de h et de l donnent celles de e et de ϖ, en observant que l'on a

$$e\delta e = h\delta h + l\delta l\,, \quad e^2\delta\varpi = l\delta h - h\delta l.$$

On a, toujours par le mouvement elliptique, en négligeant le carré de z.

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{dx^2+dy^2}{dt^2}\,,$$

d'où

$$\frac{\delta a}{a^2} = \frac{2\delta r}{r^2} + \frac{2dxd\delta x + 2dyd\delta y}{dt^2}.$$

Remplaçant δx et δy par les valeurs (k), on aura

$$\frac{\delta a}{a^2} = \frac{2m'}{3r} + \frac{2}{3}m'\,\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} + 2m'a\,\frac{xx'+yy'}{r^3} + 2m'a\,\frac{dxdx'+dydy'}{dt^2}\,;$$

ou à cause de $\dfrac{dx^2+dy^2}{dt^2} = \dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{a}$,

$$(o)\quad \frac{\delta a}{a} = \frac{2m'a}{r} - \frac{2}{3}m' + 2m'a\,\frac{xx'+yy'}{r^3} + 2m'a\,\frac{dxdx'+dydy'}{dt^2}\,;$$

et comme $\dfrac{\delta n}{n} = -\dfrac{3}{2}\,\dfrac{\delta a}{a}$,

$$\delta n = -\frac{3m'an}{r} + m'n - 3m'an\,\frac{xx'+yy'}{r^3} - 3m'an\,\frac{dxdx'+dydy'}{dt^2}\,;$$

deux équations qui donnent les variations du grand axe et du moyen mouvement dues à la première partie de R.

Les variations de l'inclinaison et du nœud sont liées (p. 60) à celles des constantes c' et c''. En différentiant les équations des aires où elles entrent par rapport à la caractéristique δ, et faisant les mêmes substitutions que dans les précédentes pour δx et δy, on trouve

$$\delta c' = 2m'c' + m' \frac{xdz' + x'dz - zdx' - z'dx}{dt},$$

$$\delta c'' = 2m'c'' + m' \frac{ydz' + y'dz - zdy' - z'dy}{dt}.$$

Et observant que z, $\frac{dz}{dt}$, c' et c'' sont ou nuls, ou de l'ordre des forces perturbatrices, on aura, en négligeant le carré de ces forces

$$(p) \quad \begin{cases} \delta c' = m' \dfrac{xdz' - z'dx}{dt}, \\ \delta c'' = m' \dfrac{ydz' - z'dy}{dt}. \end{cases}$$

Les formules qui précèdent donneront les variations de l'excentricité, du périhélie, du grand axe, du moyen mouvement, de l'inclinaison et du nœud, dues à la partie de R indépendante de R', depuis un point de l'orbite jusqu'à un autre point donné, en retranchant les valeurs de δe, $\delta\varpi$, δa, δn, $\delta c'$ et $\delta c''$ dans le premier de ces points, de leurs valeurs dans le second. On déterminera donc très-aisément par ces formules la partie la plus sensible des variations des éléments elliptiques, dans l'intervalle compris entre le point de l'orbite où l'on a commencé à séparer la fonction perturbatrice en deux parties, jusqu'au point où l'on voudra reprendre la méthode des quadratures.

Il reste encore à déterminer l'altération de l'anomalie moyenne dans le même intervalle. Cette altération est égale à $\int \delta n.dt + \delta\varepsilon - \delta\varpi$. Nommons $\overline{\delta n}$ la valeur entière de δn au point de l'orbite où l'on commence à considérer la première partie seule de R, c'est-à-dire la valeur de δn qui

résulte des perturbations antérieures; on aura, en faisant commencer ici le temps t à ce point,

$$\int \delta n.dt + \delta\varepsilon - \delta\varpi = \overline{\delta n}.t + \int \delta' n.dt + \delta\varepsilon - \delta\varpi,$$

$\delta' n$ étant la variation de n depuis le point dont il s'agit, due à la première partie de R. Cette équation devient, en remplaçant $\delta\varepsilon - \delta\varpi$ par sa valeur (h),

$$\int \delta' n.dt + \delta\varepsilon - \delta\varpi = \int \left\{ \delta' n.dt - \frac{d\varpi(1 - e\cos.u)^2}{\sqrt{1-e^2}} - \frac{de.\sin.u.(2e - e^2 - e\cos.u)}{1-e^2} \right\}.$$

ndt étant égal à $du\,(1 - e\cos.\,u)$ (page 61), le second membre est égal à

$$\text{constante} - \frac{\delta\varpi(1 - e\cos.u)^2}{\sqrt{1-e^2}} - \frac{\delta e.\sin.u\,(2 - e^2 - e\cos.u)}{1-e^2}$$

$$+ \int \left\{ \frac{\delta' n}{n}.du(1 - e\cos.u) + 2e.\delta\varpi \frac{du.\sin.u.(1 - e\cos.u)}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{\delta e.du(2 - e^2 - e\cos.u)}{1-e^2} \right\}.$$

Or (page 58), $h = 0$, $\delta h = e\delta\varpi$, $l = e$, $\delta l = \delta e$. Appelons $m'nq$ la valeur de l'expression précédente de δn, à la nouvelle origine que nous avons assignée au temps t, on aura

$$\delta' n = \delta n - m'nq\,;$$

et substituant pour δh et δl leurs expressions précédentes, on trouvera

$$(q) \quad \begin{cases} \int \delta' n.dt + \delta\varepsilon - \delta\varpi = -m'nq.t + \dfrac{m'(xy' - x'y)}{a^2\sqrt{1-e^2}} - \dfrac{\delta h(1 - e\cos.u)^2}{e\sqrt{1-e^2}} \\ \qquad - \dfrac{\delta l.\sin.u\,(2 - e^2 - e\cos.u)}{1-e^2} + \text{constante}. \end{cases}$$

Si on retranche la valeur du second membre de cette équation, à la nouvelle origine de t, de sa valeur à un autre point de l'orbite, on aura la variation de l'anomalie moyenne dans cet intervalle, due à la partie de R indépendante de R'.

L'équation (q) est très-longue à vérifier; en outre l'omission des constantes qui doivent être jointes aux valeurs de δh et δl, résultant des for-

mules (m) et (n), peut donner lieu à quelques difficultés. Voici un autre moyen d'y arriver (¹).

Appelant comme précédemment l'anomalie moyenne ζ, et conservant les mêmes notations que ci-dessus, on aura après un temps t' quelconque, compté à partir du point où l'on commence à séparer la fonction R en deux parties,

$$\delta\zeta = -m'nq.t' + \int \delta n.dt + \delta\varepsilon - \delta\varpi;$$

les valeurs de δn et $\delta\varpi$ étant données par les équations (o) et (n). En comprenant, pour plus de simplicité, le terme $\int \delta n.dt$ dans la valeur de $\delta\varepsilon$, on aura pour variation de l'anomalie moyenne, due à la partie de R indépendante de R', à partir de la nouvelle origine du temps t:

$$\delta\zeta = -m'nq.t' + \delta\varepsilon - \delta\varpi.$$

On a d'ailleurs en différentiant relativement à la caractéristique δ, la première des équations (b), d'après l'hypothèse précédente sur la valeur de $\delta\varepsilon$,

$$\delta\varepsilon - \delta\varpi = \delta u\,(1 - e\cos.u) - \delta\varepsilon.\sin.u.$$

En différentiant de la même manière la troisième équation (b) et désignant par v la longitude vraie, on trouve

$$\delta u = (\delta v - \delta\varpi)\,\frac{1 - e\cos.u}{\sqrt{1-e^2}} - \delta\varepsilon.\,\frac{\sin.u}{1-e^2}\,.$$

Remplaçant dans la précédente,

$$\delta\varepsilon - \delta\varpi = -\frac{\delta\varepsilon.\sin.u.(2 - e^2 - e\cos.u)}{1-e^2} + \frac{(\delta v - \delta\varpi)(1 - e\cos.u)^2}{\sqrt{1-e^2}}\,.$$

Or $v - \varpi$ étant l'anomalie vraie de la Comète, et les coordonnées x, y étant rapportées au plan et au grand axe de son orbite, on a

$$x = r\cos.(v - \varpi), \qquad y = r\sin.(v - \varpi);$$

d'où

$$x\delta y - y\delta x = r^2\delta v.$$

Substituant cette valeur de δv dans l'équation précédente, on obtient

(¹) *Connaiss. des Temps* pour 1838. *Additions*, p. 84.

$$\delta\varepsilon - \delta\varpi = \frac{x\delta y - y\delta x}{a^2\sqrt{1-e^2}} - \frac{\delta e \sin.u(2-e^2-e\cos.u)}{1-e^2} - \frac{\delta\varpi(1-e\cos.u)^2}{\sqrt{1-e^2}},$$

et si on substitue pour δx et δy leurs valeurs (k), on verra que cette équation devient identique avec la formule (q).

Il arrivera souvent que (page 48), dans la première approximation du moins, on pourra négliger dans la partie supérieure de l'orbite, les perturbations de la comète résultant de la partie R′ de R. Si l'on veut en tenir compte on pourra se servir des formules (d) à (h), y changer R en R′, et les intégrer par quadratures. R′ étant fort petit dans cette portion de la trajectoire, les valeurs de ces intégrales seront également petites ; mais on peut aussi dans ce cas-là déterminer sans quadratures et par des séries convergentes, les variations des éléments correspondantes à R′. Formons pour cela l'expression de R′ (page 65) :

$$R' = \frac{m'r'^2}{r^3} - \frac{3}{2}m'\frac{(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)^2}{r^5} - \frac{5}{2}m'\frac{(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)^3}{r^7} \text{ etc.}$$

Or x, y, z et r peuvent s'exprimer en fonctions de sinus et cosinus de v et de ses multiples, et des éléments de la Comète ; x', y', z' et r' en fonctions de sinus et cosinus de v' et de ses multiples. On a en outre, par l'équation connue du mouvement elliptique,

$$r^2dv = dt\sqrt{a(1-e^2)}, \quad r'^2dv' = dt\sqrt{a'(1-e'^2)};$$

donc en substituant dans les expressions différentielles des éléments R′ au lieu de R, la partie de chacune d'elles correspondante à R′, sera exprimée par une suite de termes de la forme

$$H\,dv'.\cos.(iv + i'v' + A);$$

i et i' étant des nombres entiers et positifs, et H, A des constantes. L'intégrale de ce terme est

$$\text{constante} + \frac{H}{i'}\sin.(iv + i'v' + A) + H\frac{i}{i'}\int dv.\cos.(iv + i'v' + A).$$

Ce dernier terme devient en raison de la valeur de dv

$$dv = \frac{r'^2 dv'}{r^2} \cdot \frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{\sqrt{a'(1-e'^2)}},$$

de la forme

$$(r) \qquad \mathrm{H}\frac{i'}{i}\,\frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{\sqrt{a'(1-e'^2)}}\cdot\int\frac{r'^2 dv'}{r^2}\cos.(iv+i'v'+\mathrm{A}),$$

et est beaucoup plus petit que l'intégrale

$$\mathrm{H}\int dv'.\cos.(iv+i'v'+\mathrm{A}),$$

lorsque $\frac{r'}{r}$ est une très-petite fraction. Il est encore diminué par la présence du facteur $\frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{\sqrt{a'(1-e'^2)}}$.

Cette dernière intégrale est donc à fort peu près égale à

$$\text{constante} + \frac{\mathrm{H}}{i'}\cdot\sin.(iv+i'v'+\mathrm{A}).$$

Pour en avoir une valeur encore plus approchée, il faut retrancher de sa première valeur l'intégrale (r), en y remplaçant au lieu de $\frac{r'^2}{r^2}$ sa valeur

$$\frac{a'^2(1-e'^2)^2\{1+e\cos.(v-\varpi)\}^2}{a^2(1-e^2)^2\{1+e'\cos.(v'-\varpi')\}^2};$$

observant que e' est très-petit, on développera cette intégrale en une suite de termes de la forme

$$\mathrm{H}'\int dv'\sin.(sv+s'v'+\mathrm{A}'),$$

et on intégrera chacun de ces termes par la méthode que l'on vient d'exposer. On aura ainsi d'une manière très-convergente la valeur de l'intégrale (r), et par conséquent, par des formules analytiques, les variations des éléments dans la partie supérieure de l'orbite.

SECTION II.

Des perturbations du mouvement des Comètes, lorsqu'elles approchent très-près les planètes.

Si dans sa course autour du Soleil, une Comète vient à passer très-près d'une planète perturbatrice, il peut arriver qu'elle en reçoive une action beaucoup plus considérable que de la part du Soleil, et que les éléments de son orbite autour de ce dernier soient entièrement changés. Cela pourra arriver surtout si la planète troublante est Jupiter, qui a la masse la plus considérable. Nous allons démontrer qu'alors il conviendra de le prendre lui-même comme principal centre d'attraction pendant un certain espace de temps, et de considérer le Soleil comme corps troublant.

Si l'on suppose

$$x - x' = x_1, \quad y - y' = y_1, \quad z - z' = z_1\,;$$

les six équations du mouvement de la Comète et de la planète autour du Soleil, soustraites deux à deux, donneront les trois suivantes:

$$(A)\qquad \begin{aligned} 0 &= \frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1\left\{\frac{m+m'}{\rho^3} + \frac{1}{r^3}\right\} + x'\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right),\\ 0 &= \frac{d^2y_1}{dt^2} + y_1\left\{\frac{m+m'}{\rho^3} + \frac{1}{r^3}\right\} + y'\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right),\\ 0 &= \frac{d^2z_1}{dt^2} + z_1\left\{\frac{m+m'}{\rho^3} + \frac{1}{r^3}\right\} + z'\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right); \end{aligned}$$

où x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées de la Comète rapportées au centre de la planète, et ρ la distance mutuelle de ces deux corps. Si cette distance devient assez petite pour que $\frac{m+m'}{\rho^3}$ l'emporte considérablement sur les autres termes dépendants de l'action du Soleil, on pourra, dans une première approximation du moins, négliger ces derniers, et les équations (A) donneront le mouvement elliptique de m autour de m'. Si nous faisons abstraction de l'influence des autres planètes, la force perturbatrice dans ce mouvement sera la différence des actions du Soleil sur la Comète et la

planète, différence qui est relativement à l'action $\frac{m'}{\rho^2}$ de la planète sur la Comète, de l'ordre $\frac{\rho^3}{m'r^3}$ [1]. Tant que cette quantité sera peu considérable, on pourra, sans erreur sensible, supposer elliptique le mouvement relatif de la Comète autour de la planète. Lorsqu'au contraire elle sera fort grande, on pourra négliger $\frac{m'}{\rho^3}$ relativement à $\frac{1}{r^3}$ et considérer le mouvement de la Comète autour du Soleil comme elliptique. Pour fixer avec quelque précision la limite vers laquelle on peut changer de centre principal d'attraction, concevons la Comète située entre la planète et le Soleil, et supposons $\frac{m'}{\rho^2}$ ou $\frac{m'}{(r'-r)^2}$ moyen proportionnel entre $\frac{1}{r^2}$ et $\frac{2(r'-r)}{r^3}$. On obtient alors pour le rayon $r'-r$ de la sphère d'activité de la planète,

$$r'-r = r\sqrt[5]{\frac{m'^2}{2}}.$$

Il sera déterminé avec d'autant plus d'exactitude que la masse de la planète troublante sera plus petite ; on peut même l'augmenter notablement sans qu'il en résulte d'erreur sensible.

La limite de la sphère d'attraction de la planète étant ainsi déterminée, on connaîtra les valeurs des coordonnées de la Comète et les composantes

[1] En effet, l'action du Soleil sur la Comète est à peu près $\frac{1}{r^2}$; son action sur la planète $\frac{1}{r'^2}$; différence : $\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2} = \frac{r'^2 - r^2}{r^2 r'^2}$, ou encore $\frac{(r'+r)(r'-r)}{r^2 r'^2}$.

Or r' est peu différent de r, on pourra donc écrire $\frac{2r(r'-r)}{r^4}$ ou $\frac{2(r'-r)}{r^3} = \frac{2\rho}{r^3}$, expression approchée de la force perturbatrice.

L'action de la planète sur la Comète, en négligeant la masse de celle-ci, est $\frac{m'}{\rho^2}$; divisant ces deux forces l'une par l'autre, on trouve $\frac{2\rho^3}{m'r^3}$, pour le rapport de la première à la seconde.

de sa vitesse correspondant à l'époque où elle entre dans cette sphère d'attraction. Au moyen de ces valeurs et des analogues relatives à la planète, on calculera les éléments de l'orbite relative de la Comète autour de la planète, considérée maintenant comme centre principal du mouvement. Ce calcul se fera par les formules des n°s 18 et 19 du IIme livre de la *Mécanique Céleste*. Les coordonnées du point de la sortie hors de la sphère d'attraction de la planète, devront être symétriques avec celles du point de l'entrée, si on les rapporte au grand axe de l'orbite relative dont la position est connue relativement au système d'axes primitif et qui change continuellement en raison de mouvement de translation de la planète. On pourra donc obtenir les valeurs de ces coordonnées et des composantes de la vitesse correspondantes, et en déduire ensuite, par les formules citées du mouvement elliptique, les éléments de la nouvelle orbite autour du Soleil, éléments qui pourront différer complétement de ceux de l'orbite précédente. Ainsi il pourra arriver, qu'après une semblable perturbation, une Comète qui avait été visible pour nous pendant une ou plusieurs portions de révolutions successives, se trouve décrire désormais une trajectoire qui la maintienne à de trop grandes distances de notre globe pour pouvoir être aperçue. Inversement il pourra arriver aussi, qu'en remontant dans les phases antérieures du mouvement d'une Comète, on trouve également une période de grande proximité d'une planète perturbatrice, dont l'action ait tellement attiré les éléments de la Comète, qu'elle l'ait rendue visible pour nous d'invisible qu'elle avait été précédemment.

Ces deux circonstances se sont rencontrées dans la première Comète de 1770. Cette Comète avait été découverte par Messier dans la nuit du 14 au 15 juin 1770; elle devint ensuite visible à l'œil nu, et s'approcha de la Terre vers le 1er juillet, plus qu'aucune autre Comète ne l'a encore fait. Après de nombreuses tentatives infructueuses faites par les astronomes pour l'assujettir aux lois du mouvement parabolique, Lexell lui assigna pour trajectoire une orbite elliptique, dont la période était d'environ cinq ans et deux tiers. Les lieux calculés au moyen de ses éléments s'accordaient avec les observations faites par Messier et Maskelyne, et néanmoins la Comète dont la première apparition avait été si frappante ne reparut plus dès lors. On soupçonna que l'action de Jupiter avait été cause de cette anomalie, et l'Institut national de France proposa pour sujet d'un prix la théorie de cette

Comète. Burckhardt le remporta [1] le 15 nivose an IX. Ses principaux résultats se trouvent rapportés dans le IXme livre de la *Mécanique Céleste*. Il avait en effet entrepris ses recherches à l'instigation de La Place, et employé ses formules pour le calcul. Sans s'attacher beaucoup à la détermination des perturbations de la Comète dans toute sa trajectoire, son principal but était d'analyser les irrégularités de sa marche aux environs de Jupiter, afin d'expliquer ses phases de visibilité et d'invisibilité avant et après 1770. Il concluait que l'attraction de Jupiter avait pu rendre cet astre visible en 1770 d'invisible qu'il était auparavant, et le rendre ensuite invisible depuis 1779, et cela parce qu'il avait passé en 1767 et 1779 à une grande proximité de cette planète.

Depuis Burckhardt, plusieurs astronomes se sont encore occupés de la théorie de cette Comète, nous citerons en particulier les travaux de M. Clausen, astronome à Dorpat, insérés en 1841 dans les *Astronomische Nachrichten* n°s 439 à 441, et ceux de M. Le Verrier, dont un extrait se trouve dans le tome XIX des *Comptes Rendus* de l'Académie des sciences de Paris. Le premier de ces deux auteurs s'est attaché à déterminer avec toute l'exactitude possible l'orbite décrite par la Comète autour du Soleil pendant son apparition. Pour être parfaitement sûr de ses points de départ, il a reconstruit pour tout l'intervalle de temps pendant lequel des observations de la Comète ont été faites, l'éphéméride du Soleil d'après les données les plus récentes; il a calculé les lieux apparents des étoiles auxquelles les positions observées ont été rapportées; puis dans une première approximation les perturbations produites par la Terre et les autres planètes, en prenant pour base les éléments donnés par Burckhardt. Pour une seconde approximation, il calcule lui-même une orbite elliptique plus exacte, en tenant compte de ces perturbations. Il juge nécessaire de reprendre avec ces nouveaux éléments le calcul de l'influence de la Terre, qui dans la portion observée de la trajectoire est la plus considérable, et conservant les mêmes valeurs que précédemment pour les perturbations produites par les autres planètes, il déduit les corrections totales à apporter aux éléments pour tous les jours d'observation; comparant ensuite les lieux observés avec les positions qui

(1) *Mémoires de l'Acad. des Sc.*, t. III (1802), Histoire, p. 50. Son travail se trouve en entier dans les *Mémoires* de la même Académie pour 1806.

en résultent, il obtient 279 différences en ascension droite et en déclinaison, qui lui servent à déterminer, par la méthode des moindres carrés, les éléments les plus probables de l'orbite décrite par la Comète entre les limites de sa visibilité.

Le travail de M. Le Verrier est encore plus étendu, son but étant de se procurer non pas un système, mais tous les systèmes d'éléments susceptibles de satisfaire à l'apparition de 1770, pour en déduire ensuite les circonstances du mouvement de la Comète avant et après cette apparition. Dans les trois premières sections de son mémoire, M. Le Verrier discute soigneusement les observations faites en l'année 1770 et calcule les perturbations produites par la Terre pendant la période de la plus grande proximité des deux astres. Après la comparaison de la théorie avec les observations, il se voit obligé de ne conserver que celles de Messier et de Maskelyne, et en conclut 84 équations de condition entre les erreurs que présentent les positions calculées avec les éléments provisoires et les corrections que doivent recevoir ces éléments pour satisfaire aux observations. La résolution de ces équations par la voie ordinaire d'élimination, indique que le cas dont elles dérivent approche du cas extrême de l'indétermination, d'où l'on doit inférer que les quatre mois d'observations sont insuffisants pour déterminer d'une manière précise tous les éléments de l'orbite. Au lieu de chercher dès lors à obtenir leurs valeurs absolues, M. Le Verrier eut l'idée de les considérer tous comme fonctions d'une même arbitraire, à laquelle on n'aurait qu'à attribuer toutes les valeurs comprises entre certaines limites, pour avoir ainsi tous les systèmes d'éléments susceptibles de satisfaire aux observations dans les limites de leur exactitude. L'introduction de l'indéterminée μ, la recherche de ses limites et des fonctions de cette indéterminée qui devaient représenter les différents éléments, recherche excessivement délicate, font l'objet de la quatrième section du travail que nous mentionnons. La solution de M. Clausen dont nous avons parlé plus haut, est une des solutions particulières comprises dans l'expression générale que l'auteur donne des éléments de l'orbite. Dans la section suivante, il calcule l'expression des perturbations héliocentriques de la Comète jusqu'au 28 mai 1779, produites par toutes les planètes. Il insiste sur cette précaution, omise dans la *Mécanique Céleste*, et dont on concevra facilement l'importance, en observant que, lorsqu'on cherche à découvrir si la

Comète est passée en avant ou en arrière de Jupiter, on ne peut négliger une variation de 0,045 dans le demi-grand axe obtenu par ce calcul, lorsque la distance du quatrième satellite à Jupiter n'est pas le tiers de cette quantité. La position de la Comète est ainsi bien connue relativement à cette planète, jusqu'au 28 mai 1779, époque vers laquelle son action vient à l'emporter sur celle du Soleil. La sixième et dernière section traite du mouvement autour de Jupiter, pris alors pour centre principal d'attraction, et de l'orbite qui en résulte finalement autour du Soleil. Les éléments de l'orbite décrite autour de Jupiter sont des fonctions de l'indéterminée μ. On peut les discuter dans les limites de cette arbitraire et distinguer les conséquences certaines de celles qui restent dans le vague. De la valeur du demi-grand axe de cette orbite, M. Le Verrier conclut que la Comète a décrit un arc d'hyperbole autour de Jupiter, qu'ainsi il est impossible qu'elle soit devenue un satellite de cette planète, comme on l'avait quelquefois supposé pour expliquer sa non-réapparition. Il est possible qu'elle ait traversé le système des satellites, mais peut-être aussi est-elle passée fort loin en dehors de l'orbite du quatrième. Il existe un système d'éléments pour lequel, à tout prendre, elle a pu aller heurter la planète elle-même, mais cette circonstance est très-peu probable, et il importe d'examiner quel cours elle a dû reprendre relativement au Soleil en échappant à l'action de Jupiter, hypothèse beaucoup plus vraisemblable. Les éléments du mouvement héliocentrique définitif seront encore des fonctions de μ. « Supposons ces fonctions formées, dit M. Le Verrier, il sera indispensable de les réduire en une table, où l'on puisse apercevoir les valeurs numériques des différents éléments qui correspondront simultanément à une même valeur de μ. Et si l'on ne peut choisir actuellement parmi les différentes orbites qui en résulteront, si l'on ne peut par conséquent prédire l'époque du retour de la Comète, cette table donnera du moins tout ce qu'on peut demander aujourd'hui, les moyens de reconnaître la Comète de 1770 dans une de ses nouvelles apparitions. »

Pour achever ce qui a trait au cas particulier que nous venons de considérer, c'est-à-dire celui de Comètes s'approchant très-près des planètes, nous ajouterons que quelques astronomes ont conçu l'idée que toutes les orbites périodiques des Comètes pourraient avoir une origine planétaire.

et ne feraient plus ainsi exception à une origine commune étrangère à notre système solaire qu'on leur a attribuée. M. Valz, directeur de l'observatoire de Marseille, dans une lettre insérée dans les *Astron. Nachr.*, n° 504, développe cette idée et assigne à chacune des Comètes périodiques que nous connaissons, la planète qui aurait été la cause probable de la fixation de son mouvement autour du Soleil. « Ce sont sans doute, dit-il en terminant, des idées un peu hardies, mais c'est en ne craignant pas d'en émettre de telles et en les soumettant à un examen public, qu'on peut parvenir parfois à reconnaître des vérités scientifiques si bien cachées, qu'il est assez difficile de les découvrir. »

SECTION III.

Des Quadratures mécaniques.

Dans tout ce qui précède, nous avons vu que, ne pouvant exprimer les coordonnées des Comètes et les éléments elliptiques de leurs orbites en fonctions du temps, considéré comme variable indépendante, les astronomes doivent se servir de formules qui donnent les changements qu'éprouvent ces éléments elliptiques par l'action des planètes pendant un temps très-court, pour déterminer les positions de ces corps célestes. Lorsque par la substitution des valeurs numériques dans ces expressions, on a calculé les changements des éléments pendant un nombre suffisant de petits intervalles de temps qui se suivent, on obtient par l'espèce de sommation connue sous le nom de *quadrature mécanique*, les changements quelconques des éléments qui peuvent avoir eu lieu pendant tout l'intervalle, jusqu'au temps pour lequel on a établi ces calculs, et l'on peut ainsi calculer les coordonnées de la Comète pour ce même temps. C'est de ce procédé particulier d'intégration que nous allons dire quelques mots.

Il se fonde sur le calcul de l'expression générale d'une fonction quelconque, au moyen de valeurs numériques données de cette fonction par les interpolations; les valeurs données de la fonction correspondant toujours

à des valeurs déterminées des variables qui y sont contenues. Dans le problème des perturbations qui nous occupe, les fonctions que nous avons à considérer ne renferment qu'une variable, qui dans les formules qui précèdent est l'anomalie excentrique de la Comète, et nous supposerons cet argument croissant en progression arithmétique. Cette forme de la suite des arguments pourra seule être employée avec avantage dans le calcul en question.

Employant donc l'algorithme sur lequel est fondé le calcul des différences finies, désignons par y une fonction quelconque de la variable indépendante x. Cette variable est regardée comme pouvant prendre successivement plusieurs valeurs déterminées x_0, x_1, x_2, etc., en vertu desquelles la fonction y prendra également les valeurs que nous représenterons par y_0, y_1, y_2, etc. Puis nous écrirons :

$$(D)\quad \begin{array}{l} y_1 - y_0 = \Delta y_0, \quad y_2 - y_1 = \Delta y_1, \quad y_3 - y_2 = \Delta y_2, \text{ etc.} \\ \Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0, \quad \Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1, \text{ etc.} \\ \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \Delta^3 y_0, \text{ etc.} \\ \text{etc.} \end{array}$$

Le signe Δ indiquant la différence entre la valeur actuelle de la quantité qui en est affectée et la valeur que reçoit cette quantité par l'effet d'un changement *fini* attribué à la valeur de la variable dont elle dépend, Δy_0 est dit la *différence* de la fonction y_0. On représente par $\Delta^2 y_0$ la *différence* de Δy_0 ou la *différence seconde* de la fonction y_0, par $\Delta^3 y_0$ la *différence* de $\Delta^2 y_0$ ou la *différence troisième* de la fonction y_0, et ainsi de suite.

En vertu de ces notations et en considérant la série des équations analogues aux précédentes, qu'on obtiendrait en passant aux différences d'ordres plus élevés, on voit aisément qu'on en tirera l'expression suivante de la fonction y_n :

$$(E)\quad y_n = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\Delta^3 y_0 + \dots + \Delta^n y_0$$

et réciproquement :

$$\Delta^n y_0 = y_n - n y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\,2} y_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3} y_{n-3} + \dots \pm y_0.$$

Le signe + du dernier terme devant être pris quand n est pair, et le signe — quand n est impair.

Si la variable x varie par la *différence constante* Δx et que nous écrivions y_x pour représenter la valeur de la fonction y quand on donne à la variable une valeur désignée par x, nous devrons, en remplaçant dans la première des équations qui précèdent y_n par y_x, remplacer n par $\frac{x}{\Delta x}$ (1), et cette formule deviendra :

$$y_x = y_0 + \frac{x}{\Delta x} \Delta y_0 + \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\frac{\Delta^2 y_0}{1.2} + \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right)\frac{\Delta^3 y_0}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Nous regardons cette formule comme pouvant représenter les valeurs de y, non-seulement quand on y donne à x les valeurs 0, Δx, $2\Delta x$, $3\Delta x$, etc., mais pour une valeur quelconque de cette variable. On pourra donc, en la multipliant par dx et intégrant entre deux limites données a et b, obtenir la valeur d'une intégrale définie de la forme $\int_a^b y.dx$, forme sous laquelle on pourra toujours mettre les expressions des coefficients différentiels des variations obtenues pour les éléments de l'orbite de la Comète (section 1re, équations (d) à (i)); ces expressions étant intégrées entre des limites assez resserrées pour que le décroissement des différences Δy, $\Delta^2 y$, etc., dont la formule ci-dessus tire sa convergence, s'opère suffisamment vite.

Pour obtenir la valeur de cette intégrale, remarquons que l'équation précédente revient à

(1) Le facteur n qui entre dans l'équation (E) indique en effet le nombre des accroissements qu'a subis la variable, chacun de ces accroissements étant égal à l'unité. Maintenant que ces accroissements valent Δx, leur nombre correspondant à l'indice x sera égal à $\frac{x}{\Delta x}$.

$$
\begin{aligned}
y_x = y_0 &+ \frac{x}{\Delta x}\Delta y_0 \\
&+\left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 - \frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^2 y_0}{1.2} \\
&+\left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 + 2\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^3 y_0}{1.2.3} \\
&+\left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^4 - 6\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 + 11\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 - 6\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^4 y_0}{1.2.3.4} \\
&+\left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^5 - 10\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^4 + 35\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 - 50\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 + 24\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^5 y_0}{1.2.3.4.5} \\
&+\left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^6 - 15\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^5 + 85\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^4 - 225\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 + 274\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 - 120\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^6 y_0}{2.3.4.5.6} \\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Multipliant par dx et intégrant de $x = 0$ jusqu'à $x = \Delta x$, il viendra

$$
\int_0^{\Delta x} y.dx = \Delta x\Big[y_0 + \tfrac{1}{2}\Delta y_0 - \tfrac{1}{12}\Delta^2 y_0 + \tfrac{1}{24}\Delta^3 y_0 - \tfrac{19}{720}\Delta^4 y_0 + \tfrac{3}{160}\Delta^5 y_0 - \tfrac{863}{60480}\Delta^6 y_0 + \text{etc.}\Big];
$$

expression qui donnera la valeur de la première partie, comprise entre les limites 0 et Δx, de l'intégrale proposée $\int_a^b y.dx$. La même formule fournira les expressions des parties suivantes de cette intégrale, en écrivant y_1, y_2, y_3, etc., à la place de y_0; d'où l'on conclut en les additionnant :

$$
\int_0^{n\Delta x} y.dx = \Delta x\left[\begin{array}{c}
y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \\
+ \frac{1}{2}(\Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \dots + \Delta y_{n-1}) \\
- \frac{1}{12}(\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2 + \dots + \Delta^2 y_{n-1}) \\
+ \frac{1}{24}(\Delta^3 y_0 + \Delta^3 y_1 + \Delta^3 y_2 + \dots + \Delta^3 y_{n-1}) \\
- \text{etc.}
\end{array}\right]
$$

et remarquant que

$$\Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \dots + \Delta y_{n-1} = y_n - y_0 ,$$
$$\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2 + \dots + \Delta^2 y_{n-1} = \Delta y_n - \Delta y_0 ,$$
$$\Delta^3 y_0 + \Delta^3 y_1 + \Delta^3 y_2 + \dots + \Delta^3 y_{n-1} = \Delta^2 y_n - \Delta^2 y_0 ,$$
etc.,

on changera l'expression précédente en celle-ci :

$$(F) \quad \int_0^{n\Delta x} y\, dx = \Delta x \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \\ - \frac{1}{12} (\Delta y_n - \Delta y_0) + \frac{1}{24} (\Delta^2 y_n - \Delta^2 y_0) \\ - \frac{19}{720} (\Delta^3 y_n - \Delta^3 y_0) + \frac{3}{160} (\Delta^4 y_n - \Delta^4 y_0) \\ - \frac{863}{60480} (\Delta^5 y_n - \Delta^5 y_0) + \text{etc.} \end{array} \right]$$

Cette formule donne un moyen sûr de calculer la valeur de l'intégrale $\int y\, dx$ entre des limites données, en connaissant un certain nombre de valeurs particulières de la fonction y, correspondant à des valeurs de la variable en progression arithmétique. Le premier terme seul

$$\Delta x \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n\right),$$

donne déjà une valeur approchée de l'intégrale ; les autres sont la correction de cette valeur. Le résultat final sera d'autant plus exact que, le nombre n étant plus grand, les différences qui composent les termes de correction sont plus petites.

Mais observons que les valeurs de Δy_n, $\Delta^2 y_n$, $\Delta^3 y_n$, etc., dépendent de y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}, etc., et l'on est censé n'avoir calculé que les fonctions $y_0, y_1, \dots y_n$. Pour résoudre cette difficulté, nous aurons recours à une autre expression de la différence $\Delta^r y_n$, qui est (note VII) :

$$\Delta^r y_n = \Delta^r y_{n-r} + \frac{r}{1} \Delta^{r+1} y_{n-r-1} + \frac{r(r+1)}{1.2} \Delta^{r+2} y_{n-r-2}$$
$$+ \frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3} \Delta^{r+3} y_{n-r-3} + \text{etc.}$$

Faisant dans cette formule $r=1$, $r=2$, $r=3$, etc., on obtient les valeurs

de Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, etc., qui mises dans la relation (F) donnent

$$(G)\quad \int_0^{n\Delta x} y.dx = \Delta x \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \\ - \frac{1}{12} (\Delta y_{n-1} - \Delta y_0) - \frac{1}{24} (\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0) \\ - \frac{19}{720} (\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0) - \frac{3}{160} (\Delta^4 y_{n-4} + \Delta^4 y_0) \\ - \frac{863}{60480} (\Delta^5 y_{n-5} - \Delta^5 y_0) - \text{etc.} \end{array} \right]$$

Cette formule ne présente plus l'inconvénient de la précédente, toutes les différences qu'elle renferme pouvant être calculées au moyen de y_0, y_1, $y_2 \ldots y_n$. Pour l'appliquer aux variations des éléments de l'orbite de la Comète, on prendra comme variable indépendante, c'est-à-dire comme abscisse de la courbe dont l'intégrale représente l'aire d'un segment, l'anomalie excentrique de la Comète, que nous avons précédemment désignée par u, et si l'on représente par Qdu la variation différentielle d'un des éléments de l'orbite, on fera varier u de degré en degré, ou de deux degrés en deux degrés, et on déterminera les valeurs correspondantes de Q. En les désignant par Q_0, Q_1, $Q_2 \ldots Q_n$, la formule (G) donnera la valeur $\int Qdu$ ou la variation de l'élément de l'orbite, correspondante à la variation supposée dans l'arc de l'anomalie excentrique. Le plus souvent, il suffira de ne considérer dans cette formule que la première différence finie; mais vers les points où la Comète est près du minimum de sa distance à la planète perturbatrice, ce qui rend fort considérables les valeurs de $\frac{1}{\rho^3}$ et par conséquent celles de Q, il faut avoir égard aux différences suivantes, il sera même utile alors de diminuer l'intervalle qui sépare les coordonnées équidistantes, en faisant varier l'anomalie excentrique de demi-degré en demi-degré.

CHAPITRE QUATRIÈME.

Travaux plus récents sur le mouvement troublé des Comètes.

La découverte des petites planètes situées entre Mars et Jupiter, au commencement du dix-neuvième siècle; celle de plusieurs nouvelles Comètes périodiques outre celle de Halley, dont une récente apparition a aussi nécessité de nouveaux calculs; des prix proposés par les Académies, et d'autres causes encore, ont engagé bon nombre d'astronomes dans les derniers temps à s'occuper des perturbations des corps célestes se mouvant dans des ellipses d'excentricités et d'inclinaisons quelconques. On sait que les quatre astéroïdes présentent à ces deux égards des différences notables d'avec les anciennes planètes, et il fut impossible de leur appliquer les procédés suivis jusqu'alors envers celles-ci, pour obtenir leurs perturbations. Nous ne nous occuperons pas ici de ces corps, au nombre de cinq aujourd'hui, considérés généralement comme des débris d'une planète dont l'existence fut soupçonnée déjà par Pythagore; mais on conçoit aisément les points de contact que leur théorie doit présenter avec celle des Comètes qui est l'objet essentiel de ce travail. Donnons d'abord un abrégé de l'histoire des Comètes reconnues périodiques depuis trente ans, et des principales tentatives faites pour reconnaître des analogies entre les trajectoires de ces différents astres et leur assigner des orbites elliptiques.

Le phénomène remarquable de la réapparition d'une Comète à son périhélie, s'est reproduit à l'égard de celle découverte en 1818 par M. Pons, qui observait alors à Marseille. La comparaison de ses éléments paraboliques, avec ceux d'une Comète observée en 1805, fit soupçonner l'identité de ces deux astres. La remarque en fut faite au Bureau des Longitudes par M. Arago, lorsque la découverte de la nouvelle Comète y fut annoncée; elle fut faite également en Allemagne par Olbers, qui pensa de plus que cette Comète devait être celle qui avait déjà été vue en 1795 et 1786. D'après

cette conjecture, le temps de sa révolution ne pouvant être que d'un très-petit nombre d'années, il devenait indispensable d'avoir égard à l'ellipticité de son orbite dans le calcul de ses éléments, c'est ce que fit M. Encke, alors établi à Gotha. Les éléments elliptiques qu'il détermina, soit d'après les observations de 1805, soit d'après celles de 1818, différaient entre eux encore moins que les éléments paraboliques, et il ne resta plus de doute qu'ils n'appartinssent à un même astre, dont le temps périodique est d'à peu près trois ans et un tiers. Il a dès lors porté le nom de Comète d'Encke [1], et le même éminent astronome a consacré de longs travaux au calcul de ses perturbations, pour les différents retours qu'on a pu observer.

Le 26 février 1826, à Josephstadt en Bohème, M. Biela découvrit une nouvelle Comète dans la constellation du Bélier. M. Gambart la découvrit de son côté le 9 mars à Marseille, et on l'observa généralement en Europe jusqu'au commencement de mai. Dès les premières observations, on fut en état d'entrevoir par le calcul des orbites paraboliques, que les éléments de la nouvelle Comète avaient une grande ressemblance avec ceux des Comètes de 1772 et 1806. Cette hypothèse, tout en indiquant une même Comète dans ces trois apparitions, s'écartait beaucoup des observations, comme cela devait arriver, mais MM. Gambart et Clausen, après quelques essais, trouvèrent chacun séparément une ellipse qui représentait assez exactement les positions observées pour ne laisser aucun doute sur l'identité de ces trois Comètes. La durée de la révolution était de 6 ans et 7 dixièmes environ. Dès lors, en effet, cet astre a reparu trois fois : à la fin de 1832, en 1839 et enfin au commencement de 1846, où il a présenté le phénomène singulier et unique d'un dédoublement, qui a vivement excité la curiosité des astronomes. D'après un mémoire que M. Plantamour vient de composer sur cette Comète, l'augmentation dans la distance apparente des deux noyaux, qui s'est opérée pendant la période de leur visibilité, paraît devoir être un effet de perspective. En réalité cette distance a conservé à peu près la même valeur. Quant à l'apparition soudaine d'un second noyau à côté de l'ancien qu'on avait observé, elle demeure un fait inexpliqué.

Le retour de la première Comète reconnue périodique, surpassant de

[1] M. Encke, seul entre les astronomes, a persisté à l'appeler Comète de Pons.

beaucoup par son éclat celles dont nous venons de parler, et intéressant par là un nombre beaucoup plus considérable de personnes, fut aussi un événement important pour les observateurs. Ce fut le 5 août 1835 qu'on l'aperçut pour la première fois de nouveau à Rome, et elle resta visible jusqu'au mois de mai de l'année suivante. C'est principalement à l'occasion de cette apparition de la Comète de Halley que les géomètres ont présenté des mémoires théoriques sur le calcul des perturbations cométaires, que nous aurons à examiner dans ce chapitre. M. Encke a aussi publié des travaux de ce genre à l'occasion de sa Comète, ce sont ceux que nous analyserons les premiers.

Quelques astronomes ont cru apercevoir d'autres identités entre des Comètes déjà observées.

Le 6 mars 1815, Olbers découvrit une Comète qui fut observée en Europe jusqu'au 25 août de la même année. Des éléments elliptiques lui ont été assignés avec une période de près de 74 ans. Bessel a calculé ses perturbations avec le plus grand soin, et a publié son travail dans les mémoires de l'Académie de Berlin (ann. 1812—13, p. 119). D'après cet habile astronome, le prochain passage au périhélie aura lieu au mois de février 1887. Bessel s'est aussi occupé en détail de la Comète de l'an 1807, et a publié ses travaux séparément, dans un petit mémoire intitulé *Untersuchungen über de scheinbare und wahre Bahn des im Jahre 1807 erschienenen grossen Kometen* (Königsberg 1810). Dans cet ouvrage, contenant tous les détails et précautions nécessaires pour le calcul de l'orbite primitive et troublée d'une Comète, et qui mériterait une traduction complète, il arrive à une trajectoire elliptique, avec une période de 1713 années.

M. Argelander a publié en 1823 d'importantes recherches sur la grande Comète de 1811 (¹). Flaugergues avait voulu démontrer son identité avec une Comète observée par les Chinois en 1301, et lui assignait une durée de révolution de 510 ans. Son hypothèse ne put se soutenir; Bode montra que ses éléments ne concordaient point avec ceux de la Comète de 1301, donnés par Pingré; et Bessel, sans hypothèse antérieure sur la longueur de

(¹) *F.-W.-A. Argelander, Untersuchungen über die Bahn des grossen Cometen vom Jahre 1811.* Königsberg 1823.

la période, calcula des éléments elliptiques qui lui donnent une révolution de 3383 ans. Le calcul des perturbations exécuté et toutes les observations discutées avec soin, M. Argelander arrive à un résultat de 3065,56 ans, avec une erreur possible de 43 ans. Une période aussi longue ne nous permet pas de classer cette Comète, non plus que la précédente, parmi les Comètes périodiques. Celle d'Olbers sera reconnue telle, si elle est revue en effet à la fin de ce siècle; les deux dernières que nous avons à citer seront plus vite vérifiées, vu la brièveté de leur révolution.

La première fut découverte à Paris par M. Faye, le 22 novembre 1843. M. Goldschmidt, astronome de Göttingen (¹), en calcula le premier des éléments elliptiques. Plusieurs autres calculateurs les déterminèrent à nouveau, et la période a été reconnue de 7,4 années, ce qui nous annonce un prochain retour pour l'année 1851. La seconde, découverte à Rome par M. de Vico le 22 août 1844, dans la constellation du Verseau, a été reconnue avoir une orbite elliptique par M. Faye, avec une période de 5 ½ ans. M. Le Verrier a exécuté le calcul des perturbations de ces deux astres (²), ce qui permettra d'en construire d'avance les éphémérides, avec une grande précision, pour leurs prochaines apparitions.

Ces deux dernières Comètes n'ont pas échappé non plus à des recherches d'analogie avec d'autres astres antérieurement observés. M. Valz (³) a tenté d'assimiler la Comète de M. Faye à celle de 1770, dont nous avons déjà parlé (p. 74). Une hypothèse aussi hardie n'est fondée que sur des calculs approximatifs, et ne tardera sûrement pas à être examinée plus en détail. D'autre part MM. Laugier et Mauvais (⁴) ont rapproché la Comète de M. de Vico de 1844, de celle de l'an 1585, dont ils ont calculé l'orbite elliptique d'après les observations de Tycho Brahé et Rothmann, qui leur ont fourni une révolution de 5 ⅙ ans. Enfin, nous nous bornerons à signaler les essais faits par quelques astronomes pour trouver des analogues à la grande Comète du printemps de 1843, dont la courte apparition n'a pas

(¹) *Astron. Nachr.*, t. XXI, n° 494.

(²) *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, 1844, 2ᵉ semestre, p. 666, et *Astron. Nachr.*, t. XXIII.

(³) *Astron. Nachr.*, t. XXI, n° 485.

(⁴) *Comptes rendus*, t. XIX, p. 701. *Astron. Nachr.*, t. XXII, n° 519.

permis une approximation très-grande dans les calculs de son orbite. MM. Clausen [1] de Dorpat, Capocci de Naples [2], Laugier et Mauvais [3], Cooper, Schumacher et Plantamour, se sont occupés de son assimilation à d'anciennes Comètes. Ce dernier astronome a résumé la discussion de ces diverses tentatives d'une manière très-précise, en y joignant ses propres calculs, dans un mémoire faisant suite à la quatrième série des *Observations Astronomiques* faites à Genève (1844), où nous renverrons nos lecteurs, et où il conclut à l'identité probable de la grande Comète de 1843 avec celle de mars 1668, moyennant une période de 21 ans 10 ½ mois.

SECTION Ire.

Travaux relatifs à la Comète d'Encke.

L'astre qui depuis près de trente ans porte le nom de Comète d'Encke, aurait pu en toute rigueur être considéré comme une planète, depuis que de nombreux retours successifs ont définitivement fixé les limites de sa trajectoire en dedans de celles de notre système, en deçà même de l'orbite de Jupiter. Cependant une constitution nébuleuse en apparence, une masse qu'on ne peut considérer que comme nulle, la grande excentricité de son orbite, son invisibilité pendant la plus grande partie de sa révolution, lui ont fait conserver le nom de Comète, et c'est comme telle que les astronomes ont calculé ses perturbations. MM. Encke et Damoiseau se sont les premiers occupés de cet objet. Les résultats de ce dernier se trouvent relatés dans la *Connaissance des Temps* pour 1827 et 1830. Les travaux de M. Encke sont exposés dans cinq mémoires lus à l'Académie de Berlin, et dans d'autres pièces insérées dans le journal de M. Schumacher.

Dès ses premiers retours, on avait reconnu une diminution incontestable dans les périodes de la Comète; M. Enke s'empressa de remonter à la cause d'un pareil changement du moyen mouvement, et la *Correspondance*

(1) *Astron. Nachr.*, t. XXI, n° 485.
(2) *Giornale Ufiziale di Napoli*, Maggio 1843.
(3) *Comptes rendus*, t. XVI, p. 720.

Astronomique du baron de Zach (tome IX, p. 189, année 1823), rend déjà compte de ses premiers essais pour trouver une hypothèse par laquelle on pourrait expliquer ce phénomène; les mémoires indiqués traitent longuement de la suite de cette discussion, qui a nécessité des calculs considérables.

La cause la plus naturelle à ses yeux, qui se présente pour rendre compte de l'accélération du mouvement de la Comète, est l'existence d'un *milieu* ou d'un *éther* dans l'espace, dont la résistance, en agissant comme force tangentielle contre le mouvement de l'astre, tend à rapprocher la Comète du Soleil et à abréger la période de sa révolution. Plusieurs géomètres, et Newton lui-même, s'étaient déjà exercés au calcul de l'influence qu'un tel milieu résistant pouvait produire sur les mouvements de ces astres errants. Ils ont trouvé que son effet tend continuellement à diminuer l'excentricité de leurs orbites, à raccourcir le grand axe et la période de leurs révolutions. Dans la Comète qui nous occupe, ces deux effets ont lieu d'une manière bien décidée. M. Encke suppose donc, avec Newton, l'existence d'un milieu résistant, disséminé dans tout l'espace et en cohérence avec le Soleil; il admet que sa densité diminue en raison du carré de sa distance au Soleil, et que l'intensité de sa résistance est toujours proportionnelle au carré de la vitesse de la Comète; ce milieu, dont l'influence sur les masses solides des planètes est toujours demeurée insensible, pourrait en avoir une marquée sur celles moins denses des Comètes.

Appelant U la résistance de l'éther à la distance 1 du Soleil et avec une vitesse égale à l'unité, et prenant pour unité de vitesse celle avec laquelle un mobile parcourrait l'unité de distance dans l'unité de temps, la résistance réelle dans le mouvement elliptique est alors [1] :

$$U_1 = U \frac{1 + 2\, e \cos . v + e^2}{p} \cdot \frac{k^2}{r^2},$$

où v est l'anomalie vraie, p le demi-paramètre, et k^2 la constante adoptée par Gauss (*Theoria Motus*, etc., p. 2), et qui exprime que si le Soleil agissait sur un point matériel dont la distance est 1, avec une force con-

[1] En effet, en raison de l'hypothèse faite sur la constitution de l'éther,

$$U_1 : U = \frac{ds^2}{dt^2} : r^2$$

stamment égale pendant une unité de temps (qui est ici un jour solaire moyen), il lui imprimerait au bout de ce temps une vitesse, qui lui ferait parcourir dans l'unité de temps une distance k^2, mesurée en fraction de l'unité de longueur, qui est le demi-grand axe de l'orbite terrestre. Ayant ainsi la résistance tangentielle, on la décomposera suivant deux directions, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire au rayon vecteur de la Comète, et on aura les deux composantes

$$V_1 = -U_1 \frac{1 + e \cos. v}{\sqrt{1 + 2e \cos. v + e^2}},$$

$$T_1 = -U_1 \frac{e \sin. v}{\sqrt{1 + 2e \cos. v + e^2}}.$$

Remplaçant ces forces dans les formules qui donnent les variations de l'excentricité et du moyen mouvement en fonctions des forces perturbatrices, on en tirera la valeur de U, qui conviendra le mieux aux calculs des perturbations faits antérieurement, valeur qui sera intimement liée aux valeurs adoptées pour les masses des planètes. Un premier calcul approximatif fournit pour U la quantité $\frac{1}{752,73}$. Il embrassait les 7 périodes comprises entre 1795 et 1819, et se bornait à tenir compte de l'influence de Jupiter, dont l'auteur adoptait pour masse, la valeur $\frac{1}{1067}$ de la *Mécanique Céleste*.

Dans un nouveau calcul, les perturbations furent déterminées avec tout

$\frac{ds}{dt}$ exprimant la vitesse du mobile dans sa trajectoire. Or

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = k^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right);$$

donc

$$U_1 = U.\frac{k^2}{r^2}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right);$$

ou à cause de

$$r = \frac{p}{1 + e \cos. v} \quad \text{et} \quad p = a(1 - e^2),$$

on obtient :

$$U_1 = U.\frac{k^2}{r^2}.\frac{1 + 2e \cos. v}{p}.\frac{k^2}{r^2}.$$

le soin possible ; les trois apparitions de 1819, 1822 et 1825 fournissaient des séries d'observations parfaitement satisfaisantes, et qui permettaient une nouvelle détermination de U. On choisit trois positions normales parmi celles de chacune des deux premières apparitions, et six de la dernière ; puis, les considérant toutes comme également précises et se servant de la méthode des moindres carrés, la plus petite somme des carrés des erreurs restantes, fut considérée comme une fonction d'une correction de U et de la masse de Jupiter. L'expression ainsi obtenue au moyen de 24 équations de condition (*Astron. Nachr.*, t. IX, p. 337), montre qu'une masse de Jupiter plus considérable et une diminution du coefficient U, feraient concorder mieux le calcul avec les observations. Poussant le calcul des perturbations jusque après l'apparition de 1828, faisant la même application de la méthode des moindres carrés, et changeant la masse de Jupiter d'après les déterminations de M. Nicolaï en $\frac{1}{1053,92}$, on obtient une équation finale fournissant à peu près la même correction pour U que la précédente, et qui donne $U = \frac{1}{889,76}$. Dans les calculs postérieurs des perturbations de sa Comète, M. Encke a conservé à peu près la même valeur pour ce coefficient, et a fait varier les masses des autres planètes troublantes (*Astron. Nachr.*, t. XXI, n° 458 et 459). Il satisfait, moyennant ces nouvelles constantes, aussi bien que possible aux observations faites dans les derniers retours de la Comète : cependant sa théorie sur la résistance de l'éther n'est point encore généralement admise. Bessel lui-même s'y est refusé. Voici ce que nous trouvons dans une de ses lettres, écrite à propos du parfait accord présenté par les observations de la Comète de Halley avec l'orbite que lui avait assignée M. Rosenberger pour son apparition de 1835 ([1]) : « Un fait est bien capable d'exciter notre attention ; c'est que la Comète (de Halley) est apparue quelques jours plus tard que cela n'aurait dû arriver suivant les calculs de M. Rosenberger, tandis que pour la Comète d'Encke calculée avec autant de soin, le contraire a eu lieu. On doit s'attendre qu'un nouveau retour sur le calcul, peut-être la recherche de l'influence des variations des masses planétaires,

([1]) *Astron. Nachr.*, t. XIII, p. 6.

apportera un changement dans ce résultat, mais je ne verrais pas moi-même de contradiction dans une divergence persistant à cet égard entre les deux Comètes, et quoique l'accélération des révolutions de la Comète d'Encke me semble clairement démontrée par les observations, l'hypothèse d'un milieu résistant pour expliquer cette accélération, ne me paraît pas suffisamment fondée. Le fait est simple : les périodes s'accélèrent ; il y a cent causes à supposer qui peuvent amener un pareil résultat, mais on ne peut se croire fondé à en admettre une déterminée, que lorsque sa présence est indiquée d'autre part, ou que son admission explique encore d'autres phénomènes ; et tel n'est pas le cas, ce me semble, avec le milieu résistant. Car si l'on accorde l'existence de l'éther lumineux, on ne pourra l'assimiler à l'éther résistant que lorsqu'il sera démontré qu'il ne pénètre pas dans l'intérieur des Comètes, et d'autre part aucun phénomène ne s'est présenté jusqu'ici, excepté l'altération du mouvement d'une seule Comète, qui puisse être expliqué par une résistance dans l'espace ; les mouvements des planètes et de la Lune n'en donnant aucune indication. »

M. Encke a tenté de réfuter ces objections dans le nº 305 des *Astronomische Nachrichten*, et a continué à maintenir son coefficient U dans ses calculs de perturbations. Son hypothèse n'est pourtant point généralement admise par les astronomes, dont plusieurs considèrent la présence d'un éther résistant comme un fait contestable et non encore suffisamment démontré.

Quittons maintenant cette digression, et revenons aux directions données par M. Encke pour le calcul des perturbations. Après une exposition précise de la méthode des quadratures mécaniques, et dans un travail spécial intitulé *Ueber die Berechnung der speciellen Störungen* [1], cet astronome distingué indique de quelle manière il arrive aux formules qui donnent les variations des éléments pour le cas général des orbites à excentricités et inclinaisons quelconques, en sorte que ses procédés sont applicables aux petites planètes comme aux Comètes, et il éclaircit ses préceptes en appliquant ses formules au calcul des perturbations de Vesta par Jupiter. Sa méthode théorique se rapproche de celle de Lagrange, exposée dans la *Mécanique Analytique* [2]. En voici un aperçu très-sommaire.

(1) *V. Berliner Astronomisches Jahrbuch*, für 1837.

(2) *Mécanique Analytique*, seconde partie, section VII, chap. II. § 2.

Après avoir établi les équations différentielles du mouvement elliptique, et les relations qui en sont les intégrales complètes, analogues aux équations (b), p. 58, M. Encke suppose d'abord une force perturbatrice P, agissant dans une direction Q, en sorte que ses trois composantes, parallèles aux trois axes coordonnés rectangulaires, soient $P \cos. QX$, $P \cos. QY$, $P \cos. QZ$. Sous l'influence de cette force troublante, les équations différentielles du mouvement sont analogues aux primitives, sauf que leurs seconds membres, au lieu d'être nuls, renferment respectivement chacune de ces composantes. On satisfait néanmoins à ces nouvelles équations, comme nous l'avons vu chap. II, sect. 3, au moyen des mêmes intégrales complètes, pourvu qu'on suppose les constantes arbitraires qu'elles renferment variables avec le temps, et de la forme

$$a = a_0 + \delta a\,,\quad e = e_0 + \delta e\,,\quad \omega = \omega_0 + \delta\omega\,,\ \text{etc.}$$

où a_0, e_0, ω_0 ... sont de véritables constantes, et δa, δe, $\delta\omega$, etc., de nouvelles fonctions du temps et de la force perturbatrice P, qui s'annullent quand $P = 0$. a représente le demi-grand axe, e l'excentricité, ω la longitude du périhélie comptée du nœud, etc. On a vu dans le chapitre cité de quelle manière on obtient six équations aux différences premières, pour déterminer en fonctions de P et des angles que fait sa direction avec les axes coordonnés, les coefficients différentiels pris, par rapport au temps, des six paramètres a, e, ε, ω, N et i. Trois d'entre elles résultent des équations différentielles du second ordre du mouvement troublé, les trois autres sont arbitraires. Voici sous quelle forme elles se présentent :

$$(H)\quad \begin{aligned}
P\cos.QX &= \left(\frac{dx_1}{da}\right)\frac{da}{dt} + \left(\frac{dx_1}{d\varepsilon}\right)\frac{d\varepsilon}{dt} + \left(\frac{dx_1}{de}\right)\frac{de}{dt} + \left(\frac{dx_1}{d\omega}\right)\frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{dx_1}{dN}\right)\frac{dN}{dt} + \left(\frac{dx_1}{di}\right)\frac{di}{dt},\\
P\cos.QY &= \left(\frac{dy_1}{da}\right)\frac{da}{dt} + \left(\frac{dy_1}{d\varepsilon}\right)\frac{d\varepsilon}{dt} + \left(\frac{dy_1}{de}\right)\frac{de}{dt} + \left(\frac{dy_1}{d\omega}\right)\frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{dy_1}{dN}\right)\frac{dN}{dt} + \left(\frac{dy_1}{di}\right)\frac{di}{dt},\\
P\cos.QZ &= \left(\frac{dz_1}{da}\right)\frac{da}{dt} + \left(\frac{dz_1}{d\varepsilon}\right)\frac{d\varepsilon}{dt} + \left(\frac{dz_1}{de}\right)\frac{de}{dt} + \left(\frac{dz_1}{d\omega}\right)\frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{dz_1}{dN}\right)\frac{dN}{dt} + \left(\frac{dz_1}{di}\right)\frac{di}{dt}.\\
0 &= \left(\frac{dx}{da}\right)\frac{da}{dt} + \left(\frac{dx}{d\varepsilon}\right)\frac{d\varepsilon}{dt} + \left(\frac{dx}{de}\right)\frac{de}{dt} + \left(\frac{dx}{d\omega}\right)\frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{dx}{dN}\right)\frac{dN}{dt} + \left(\frac{dx}{di}\right)\frac{di}{dt},\\
0 &= \left(\frac{dy}{da}\right)\frac{da}{dt} + \left(\frac{dy}{d\varepsilon}\right)\frac{d\varepsilon}{dt} + \left(\frac{dy}{de}\right)\frac{de}{dt} + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)\frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{dy}{dN}\right)\frac{dN}{dt} + \left(\frac{dy}{di}\right)\frac{di}{dt},\\
0 &= \left(\frac{dz}{da}\right)\frac{da}{dt} + \left(\frac{dz}{d\varepsilon}\right)\frac{d\varepsilon}{dt} + \left(\frac{dz}{de}\right)\frac{de}{dt} + \left(\frac{dz}{d\omega}\right)\frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{dz}{dN}\right)\frac{dN}{dt} + \left(\frac{dz}{di}\right)\frac{di}{dt}.
\end{aligned}$$

De ces six équations on déduira par l'élimination les six coefficients différentiels $\frac{dx}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\varepsilon}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{dN}{dt}$, $\frac{di}{dt}$, dont l'intégration donnera les valeurs exactes de δa, δe, $\delta\varepsilon$, $\delta\omega$, δN et δi, ou ajoutant respectivement a_0, e_0, ε_0, etc., celles des éléments eux-mêmes a, e, ε, ω, N et i. N représentant la longitude du nœud ascendant de l'orbite sur le plan des xy et i l'inclinaison du plan de l'orbite sur ce même plan.

Pour effectuer commodément cette élimination, il faut transformer d'une manière convenable les coefficients de $\frac{da}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\varepsilon}{dt}$, etc., dans ces équations, c'est-à-dire les quantités $\frac{dx}{da}$, $\frac{dy}{da}$, $\frac{dz}{da}$, $\frac{dx}{de}$, $\frac{dx}{d\varepsilon}$, $\frac{dx_1}{da}$, $\frac{dx_1}{de}$, etc., etc. L'auteur introduit pour cet effet certaines *directions* qui, ne dépendant que d'un lieu et d'une vitesse instantanée, doivent être considérées comme données. Supposant comme précédemment X, Y, Z les directions des trois axes coordonnés et Q celle de la force P; appelons R la direction du rayon vecteur, S celle de la perpendiculaire à ce rayon, comptés dans le sens du mouvement, T la direction de la tangente également dans le sens du mouvement, V celle de la normale vers l'intérieur de l'ellipse, enfin W la direction de la perpendiculaire au plan de l'orbite dans le sens du pôle nord de l'écliptique. On pourra exprimer les cosinus des angles que font ces directions avec les axes, au moyen des éléments de l'orbite primitive. En effet, désignant par v l'anomalie vraie, et appelant RX l'angle compris entre la direction R et l'axe X, RY l'angle compris entre R et l'axe Y, et ainsi de suite, on a :

$$x = r\cos.\mathrm{RX} = r\,\{\cos.(v+\omega)\cos.\mathrm{N} - \sin.(v+\omega)\sin.\mathrm{N}\cos.i\}$$
$$y = r\cos.\mathrm{RY} = r\,\{\cos.(v+\omega)\sin.\mathrm{N} + \sin.(v+\omega)\cos.\mathrm{N}\cos.i\}$$
$$z = r\cos.\mathrm{RZ} = r\,\{\sin.(v+\omega)\sin.i\}.$$

Les angles TX, TY, TZ, s'obtiennent de même en fonctions des éléments et de la vitesse tangentielle instantanée c, dont la valeur est donnée par l'intégrale des forces vives (Note I) :

$$c^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Les autres cosinus s'expriment aussi d'une manière analogue, en faisant décrire à l'ellipse primitive 90° dans son orbite, pour les directions S et V, et en faisant tourner le plan de cette orbite de 90° autour de la ligne des nœuds, pour la direction W. La trigonométrie donne des moyens très-simples pour exprimer les cosinus des angles que font entre elles ces différentes directions, une fois ceux qu'elles font avec les trois axes rectangulaires déterminés. Il reste à exprimer au moyen de ces angles les coefficients différentiels $\left(\frac{dx}{da}\right)$, $\left(\frac{dx}{de}\right)$, $\left(\frac{dx}{d\varepsilon}\right)$, etc.

Or les équations du mouvement elliptique fournissent $\frac{dr}{da}$, $\frac{dr}{de}$, $\frac{dr}{d\varepsilon}$, $\frac{dv}{da}$, $\frac{dv}{de}$, $\frac{dv}{d\varepsilon}$; a, e et ε étant les seuls éléments compris dans r et v: et comme on ne trouve dans les valeurs de x, y, z qui précèdent, que les combinaisons r sin. $(v+\omega)$ et r cos. $(v+\omega)$, on aura les coefficients différentiels de ces deux expressions, relatifs à a, e et ε, par de simples substitutions, et on en déduira immédiatement $\frac{dx}{da}$, $\frac{dx}{d\varepsilon}$, $\frac{dx}{de}$, $\frac{dy}{da}$, etc. Les différentielles relatives à ω, N et i, se prennent directement, et on obtient ainsi aisément tous les coefficients cherchés, en fonctions des cosinus des angles que font avec les axes les directions introduites dans la page précédente.

On en déduira sans difficulté les valeurs de $\left(\frac{dx_1}{da}\right)$, $\left(\frac{dy_1}{da}\right)$, $\left(\frac{dz_1}{da}\right)$, $\left(\frac{dx_1}{de}\right)$, etc.; car puisque ces coefficients différentiels indiquent qu'on doit d'abord différentier chaque coordonnée par rapport à t, en regardant les éléments comme constants, et qu'ensuite on différentie l'expression obtenue par rapport à chaque élément, sans avoir égard à la variation de t, dans la première différentiation on ne considérera pas les éléments comme fonctions du temps, et dans la seconde on ne considérera pas le temps t comme fonction des éléments. Les deux espèces de variables t, et les éléments, seront donc regardées comme entièrement indépendantes, et on aura par exemple :

$$\left(\frac{dx_1}{da}\right)=\left(\frac{d.\left(\frac{dx}{dt}\right)}{da}\right)=\left(\frac{d.\left(\frac{dx}{da}\right)}{dt}\right).$$

Une telle forme étant donnée à tous les coefficients de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\varepsilon}{dt}$, etc., dans les équations (H), on procédera à l'élimination par la voie ordinaire, qui, les transformations précédentes une fois faites, n'offre plus de difficulté, et on arrive à six équations, d'où on peut tirer $\frac{da}{dt}$, $\frac{d\varepsilon}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{dN}{dt}$ et $\frac{di}{dt}$, en fonctions de la force perturbatrice P et des cosinus des angles introduits. Voici leurs expressions données par Encke, où k est la constante de Gauss dont nous avons déjà parlé (p. 89), et où p représente le demi-paramètre :

$$(K)\quad\begin{aligned}
\frac{da}{dt}&=\frac{2a^2}{k^2}\,e.\,\mathrm{P}\cos.\,\mathrm{QT},\\
\frac{d\varepsilon}{dt}&=-\frac{1}{k\sqrt{a}}\cdot\left(2r-\frac{p\cos.v}{e}\right)\mathrm{P}\cos.\mathrm{QR}-\frac{1}{k\sqrt{a}}\cdot\frac{p+r}{e}\sin.v.\mathrm{P}\cos.\mathrm{QS}\\
&\qquad+\frac{3t}{k\sqrt{a}}\,.\,e.\,\mathrm{P}\cos.\,\mathrm{QT},\\
\frac{de}{dt}&=-\frac{1}{k\sqrt{p}}\cdot\frac{1-e^2}{e}\,r.\mathrm{P}\cos.\,\mathrm{QS}+\frac{p}{e}\cdot\frac{1}{k^2}\,.\,e\,\mathrm{P}\cos.\,\mathrm{QT},\\
\frac{d\omega}{dt}&=-\frac{1}{k\sqrt{p}}\cdot\frac{p\cos.v}{e}\mathrm{P}\cos.\mathrm{QR}+\frac{1}{k\sqrt{p}}\cdot\frac{p+r}{e}\sin.v.\mathrm{P}\cos.\mathrm{QS}-\cos.i.\,\frac{dN}{dt},\\
\frac{dN}{dt}&=\frac{1}{k\sqrt{p}}\cdot\frac{r\sin.(v+\omega)}{\sin.\,i}\mathrm{P}\cos.\,\mathrm{QW},\\
\frac{di}{dt}&=\frac{1}{k\sqrt{p}}\,r\cos.\,(v+\omega)\,\mathrm{P}\cos.\,\mathrm{QW}.
\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de donner la véritable expression de la force perturbatrice, décomposée suivant trois directions rectangulaires, le choix de ces axes coordonnés étant entièrement arbitraire. On sait que si l'on con-

sidère l'action des planètes m', m''... sur la Comète m, leurs coordonnées étant respectivement x', y', z', x'', y'', z''..., leurs distances au Soleil r', r''..., et leurs distances à la Comète ρ, ρ'..., on a pour les composantes de la force perturbatrice :

$$\text{P cos. QX} = \left(\frac{x'-x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3}\right) m' + \left(\frac{x''-x}{\rho'^3} - \frac{x''}{r''^3}\right) m'' + \ldots$$

$$\text{P cos. QY} = \left(\frac{y'-y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3}\right) m' + \left(\frac{y''-y}{\rho'^3} - \frac{y''}{r''^3}\right) m'' + \ldots$$

$$\text{P cos. QZ} = \left(\frac{z'-z}{\rho^3} - \frac{z'}{r'^3}\right) m' + \left(\frac{z''-z}{\rho'^3} - \frac{z''}{r''^3}\right) m'' + \ldots$$

d'où on pourra déterminer P cos. QR, P cos. QS, P cos. QT, P cos QW. Mais comme pour cette décomposition de forces, la direction des coordonnées originelles est arbitraire, et que parmi les quatre directions R, S, T, W, sur lesquelles on doit projeter la force perturbatrice, il y en a trois R, S et W, qui sont perpendiculaires les unes aux autres, on arrivera le plus directement au but, en choisissant ces directions mêmes comme axes coordonnés, et en rapportant les coordonnées des planètes troublantes à un axe des x, qui ait la direction R du rayon vecteur de la Comète, à un axe des y qui ait la direction S, et à un axe des z qui ait la direction W. On a alors évidemment pour coordonnées de la Comète :

$$x = r, \qquad y = 0, \qquad z = 0.$$

Les positions des planètes troublantes sont en général données au moyen de leurs distances au Soleil r', r''...; de leurs longitudes dans l'orbite L$'$, L$''$...; de leurs nœuds N$'$, N$''$..., ces deux derniers comptés sur l'écliptique à partir du point équinoxial, et des inclinaisons de leurs orbites i', i''... au plan de l'écliptique. M. Encke donne des formules détaillées pour transformer ces quantités en fonctions des nouvelles coordonnées, et fait usage à cet effet d'angles auxiliaires qui simplifient beaucoup le calcul. Une fois qu'on l'a exécuté, on a à calculer

$$\frac{x'-x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3}\;; \quad \frac{y'-y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3}\;; \quad \frac{z'-z}{\rho^3} - \frac{z'}{r'^3}\;;$$

expressions qui s'écrivent, à cause du système de coordonnées choisi, en posant $\Delta = \frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}$:

$$R' = \Delta x' - \frac{r}{\rho^3}, \qquad S' = \Delta y', \qquad W' = \Delta z'.$$

Marquant de deux accents les quantités analogues relatives à la planète m'', et ainsi de suite, on aura :

$$\begin{aligned} P \cos. QR &= m' R' + m'' R'' + \ldots = R_0 \\ P \cos. QS &= m' S' + m'' S'' + \ldots = S_0 \\ P \cos. QW &= m' W' + m'' W'' + \ldots = W_0 \end{aligned}$$

Puis remplaçant l'élément e par sin. φ; $\mu t + \varepsilon$ par M, qui représentera l'anomalie moyenne, et posant $\varpi = \omega + N$, c'est-à-dire désignant par ϖ la longitude du périhélie, non plus comptée du nœud, mais de l'équinoxe, on obtiendra, en substituant les valeurs qui précèdent dans les équations (K), les expressions suivantes, propres immédiatement au calcul numérique :

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{3k}{\sqrt{a}}\, e \sin. v. \frac{kR_0}{\sqrt{p}} - \frac{3k}{\sqrt{a}} \cdot \frac{p}{r} \frac{kS_0}{\sqrt{p}},$$

$$\frac{dM}{dt} = -\{2\, r \cos. \varphi - p \cot. \varphi \cos. v\} \frac{kR_0}{\sqrt{p}} - (p + r) \cot. \varphi \sin. v. \frac{kS_0}{\sqrt{p}} + \int \frac{d\mu}{dt} . dt,$$

(L)

$$\frac{d\varphi}{dt} = a \cos. \varphi \sin. v. \frac{kR_0}{\sqrt{p}} + a \cot. \varphi \left(\frac{p}{r} - \frac{r}{a}\right) \frac{kS_0}{\sqrt{p}},$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{p \cos. v}{e} \cdot \frac{kR_0}{\sqrt{p}} + \frac{p + r}{e} \sin. v. \frac{kS_0}{\sqrt{p}} + (1 - \cos. i) \frac{dN}{dt},$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{r. \sin. (v + \varpi - N)}{\sin. i} \frac{kW_0}{\sqrt{p}},$$

$$\frac{di}{dt} = r \cos. (v + \varpi - N) \frac{kW_0}{\sqrt{p}}.$$

Telles sont les formules dont l'intégration par quadrature fournira les variations des élémenls de l'orbite de la Comète, et auxquelles M. Encke, dans l'éphéméride de Berlin pour 1838, a joint quelques directions essentielles pour le calcul numérique.

La principale a rapport à la détermination de la grandeur des intervalles de temps, pour lesquels on calcule les coefficients différentiels, afin de pouvoir les intégrer ensuite. Mais les règles que l'auteur donne à cet effet ne sont aucunement applicables aux orbites de Comètes. Il nous dit lui-même, que pour ces astres, on se dirigera uniquement, soit quant à la grandeur des intervalles, soit quant au nombre et à la distribution des positions à déterminer par le calcul, d'après les circonstances qui se présenteront dans chaque cas particulier. La simple estimation en portions de la période, donnera déjà de salutaires directions pour déterminer la grandeur des intervalles. Car avec des orbites aussi excentriques, on sera obligé, pour conserver dans le calcul une forme de courbe à peu près semblable, de raccourcir considérablement les intervalles de temps dans le voisinage du périhélie. Un autre fait a une influence plus grande encore, c'est que la distance de la Comète aux planètes dans la sphère d'attraction desquelles elle entre, change si subitement, qu'on doit toujours avoir l'œil ouvert dans ces cas exceptionnels, pour ne pas s'exposer au danger d'omettre complétement ces portions de courbe anormales, en se servant d'intervalles trop étendus. Le croisement des orbites planétaires par celle de la Comète, entendu dans un sens large, entraîne nécessairement cette diminution de régularité dans la trajectoire, et on ne peut y obvier autrement, qu'en considérant de très-près la course des corps célestes en mouvement, et modifiant la grandeur des intervalles, ainsi que les altérations des éléments, de manière que l'interpolation entre les valeurs calculées de r, ρ et des coefficients différentiels, donne autant que possible leurs valeurs réelles.

Si l'on a à considérer les perturbations produites par plusieurs planètes, le calcul sera plus prompt en réunissant toutes les forces perturbatrices en une somme R_0, et la remplaçant dans les équations (L). Mais dans la pratique il vaudra mieux sacrifier quelque chose de cette promptitude, et calculer séparément les perturbations produites par chaque planète. Les masses des corps qui composent notre système sont, en effet, encore si peu sûres, qu'à chaque calcul on peut supposer, qu'il faudra par la suite introduire

des corrections à ces masses, ce qui ne sera possible que si l'on a séparé pour chaque planète l'effet de sa perturbation. Le calcul en sera augmenté sans doute, parce qu'on aura à effectuer plusieurs substitutions distinctes, mais cet inconvénient est bien compensé par le fait qu'on peut modifier la grandeur des intervalles, suivant la configuration de l'orbite de la planète troublante. Ainsi, par exemple, si le voisinage de Mercure exige pour le calcul des perturbations produites par cette planète, des intervalles de 7 ou 8 jours, on pourra en prendre de trois ou quatre fois plus grands pour celles dues à l'influence de Jupiter et Saturne. Remarquons toutefois que les corrections des éléments de la Comète doivent être déduites des perturbations de toutes les planètes à la fois, ce qui se comprend aisément.

Ces diversités dans la grandeur des intervalles, dépendant de la forme de l'orbite de la planète perturbatrice, entraîneraient des calculs sans fin, s'il était toujours nécessaire d'avoir égard à l'action de toutes les planètes. Heureusement les masses des planètes inférieures sont si petites, que leur influence ne peut être sensible que dans le cas d'un rapprochement extraordinaire ; si un pareil rapprochement ne se présente pas, on pourra la négliger tout à fait, ou employer des procédés de simplification, tels que ceux que nous avons exposés d'après Lagrange à la fin du chapitre II ; nous en verrons plus loin encore un autre, consistant à rapporter le mouvement de la Comète, non plus au centre du Soleil, mais au centre de gravité du système composé de ce corps principal, et d'une ou plusieurs planètes troublantes.

Lorsqu'on a pris une connaissance générale du calcul qu'on a à faire, qu'on a fixé l'étendue des intervalles dont on se servira, M. Encke partage les opérations à exécuter en cinq parties, savoir :

1° Le calcul des lieux de la planète troublante pour les instants convenus.

2° Le calcul des lieux de la Comète troublée et des valeurs qui sont nécessaires pour la formation des coefficients dans les équations différentielles (*L*).

3° Le calcul des forces perturbatrices suivant les directions R, S et W.

4° Leur substitution dans les formules (*L*), et le calcul des valeurs des coefficients différentiels des éléments.

5° L'intégration de ceux-ci, ou la formation de la table qui tient lieu d'intégrale générale, en y comprenant les différentes constantes.

Nous n'entrerons pas plus avant dans le détail de ces différentes portions du calcul des perturbations, ce que nous avons dit et ce qui suivra suffisant bien pour l'éclaircir complétement. M. Encke en a donné plusieurs applications dans les calculs des perturbations des petites planètes et de sa Comète. MM. Bremiker et Spörer (¹) ont été chargés par lui d'une partie des calculs relatifs à cette dernière, et il a fait connaître leurs résultats dans un des derniers volumes des éphémérides de Berlin, et dans le journal de M. Schumacher. Le travail relatif à l'apparition de 1838, offrait un intérêt de plus, en raison de ce qu'il devait fournir les premières données un peu certaines que l'astronomie ait jamais possédées, pour déterminer la masse de la planète Mercure. La valeur de cette masse donnée dans la *Mécanique Céleste* (liv. VI, p. 63), repose sur une hypothèse faite par Lagrange, impossible à vérifier, et qui se fonde sur ce que le rapport des masses des trois planètes, la Terre, Jupiter et Saturne, à leurs volumes, est à peu près en raison inverse de leurs moyennes distances au Soleil. Laplace a adopté la même supposition pour Mercure, et en a déduit la valeur $\frac{1}{2025810}$, qui, vu son origine fort contestable, demandait une vérification. Or M. Encke annonçait en mars 1838 (²), que vers le 23 août 1835 la Comète s'était approchée de Mercure jusqu'à une distance de 0,12. Les altérations des éléments de la Comète résultant de ce rapprochement, avaient tellement influé sur la précédente apparition, qu'elles devaient accélérer le retour au périhélie de 0,1 jour, et qu'en raison de la grande proximité où la Comète devait se trouver de la Terre dans l'apparition suivante, les perturbations en ascension droite, s'étendraient jusqu'à près d'un degré, et celles en déclinaison, jusqu'à 17 minutes environ. On conçoit que la simple comparaison des observations avec l'éphéméride calculée au moyen de ces perturbations, qui avaient pour base l'ancienne valeur de la masse de Mercure, permettrait de décider si cette masse était entachée d'une erreur considérable. Déjà les observations faites à Genève, du 10 octobre au 20 novembre 1838 (³), amenèrent en effet mon oncle, M. Alfred Gautier, à penser que cette valeur était notablement trop forte. Celles qu'on fit à Berlin

(¹) *Berliner Astronomisches Jahrbuch*, für 1840. *Astron. Nachr.*, nºˢ 488 et 534.
(²) *Astron. Nachr.*, t. XV, nº 353.
(³) *Bibliothèque Universelle*, t. XVII, p. 384, octobre 1838.

du 16 septembre au 28 novembre, conduisirent M. Encke à une conclusion analogue, c'est-à-dire que la valeur hypothétique adoptée jusqu'alors pour la masse de Mercure, devait être réduite environ de moitié. Les calculs qui ont motivé ce résultat furent exposés à l'Académie de Berlin dans un mémoire lu dans l'année 1841, et dont un extrait seulement fut publié dans les *Rapports mensuels* de cette Académie. La nouvelle valeur à laquelle M. Encke s'est arrêté pour la masse de Mercure est $\frac{1}{4865751}$. Nous voyons dans ce calcul un exemple intéressant de l'utilité que peut avoir le calcul des perturbations cométaires, et à laquelle on n'avait guère songé auparavant.

Nous ne terminerons pas cette section sans mentionner encore un grand mémoire de M. Hansen, publié en 1843 sous le titre de *Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung*. Considérant une Comète m et une planète m', l'auteur distingue, comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois, les trois cas où la distance de l'astre troublé au Soleil est plus petite, plus grande, ou alternativement plus petite ou plus grande que celle de l'astre troublant au même corps. Dans la *première partie* de son ouvrage, qui a seule paru, il ne traite que le premier cas, et l'éclaircit en y joignant comme exemple le calcul des perturbations absolues de la Comète d'Encke par Saturne. Les méthodes à employer pour traiter le second cas, peuvent rigoureusement se déduire de celles qu'il expose, mais le troisième demeure encore irrésolu. M. Hansen reste ainsi dans les limites de ce qu'avait fait Lagrange, mais ses procédés sont nouveaux. Nous ne les exposerons point en détail, une traduction française venant d'en paraître dans la *Connaissance des Temps pour 1847*, nous nous bornerons à une revue sommaire de ses opérations.

Le point essentiel dans le problème qui l'occupe, est d'éviter, dans la fonction perturbatrice et dans toutes les fonctions dont le développement est employé, des séries *infinies* procédant suivant les puissances de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite de la Comète. C'est là le but de son procédé. Appelant, comme précédemment, a le demi-grand axe, e l'excentricité, et u l'anomalie excentrique de la Comète, il met la fonction perturbatrice Ω sous la forme :

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\,\Omega = \Sigma\,(1-e^2)^{\frac{l}{2}} \sin.^l u\,(\cos.\, u - e)^k\, C_{k,l}\,.$$

k et l étant toujours des nombres entiers et positifs, chacun des termes de Ω consistera en un nombre *fini* de termes qu'on peut ordonner suivant les sinus et cosinus des multiples de l'anomalie excentrique de la Comète, et les coefficients de ces sinus et cosinus étant des fonctions entières et rationnelles de e et de $\sqrt{1-e^2}$. Les quantités $C_{k,l}$ se laissent aussi développer en fonctions finies de l'anomalie moyenne g' de la planète et les coefficients de tous les termes de ces fonctions sont des fonctions finies de son excentricité e'. En sorte que si l'on introduit ce développement de $C_{k,l}$ dans l'expression précédente de Ω, elle prend la forme :

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\,\Omega = \Sigma M_{i,i'} \cos.(iu + i'g') + \Sigma N_{i,i'} \sin.(iu + i'g'),$$

où les coefficients $M_{i,i'}$ et $N_{i,i'}$ sont composés uniquement de fonctions entières et rationnelles de e', $\frac{1}{1-e'^2}$, e, $\sqrt{1-e^2}$, et $\sin.^2 \frac{1}{2} I$, I étant l'inclinaison des deux orbites. Les dérivées de la fonction perturbatrice nécessaires pour le calcul des perturbations de la longitude, du rayon vecteur et de la latitude, s'obtiennent aussi sous des formes analogues.

Les formules dans lesquelles elles entrent, sont tirées de la *Théorie de la Lune* (1) du même auteur. Les perturbations de la longitude moyenne et du rayon vecteur s'obtiennent par l'intégration d'une fonction T des dérivées $\frac{d\Omega}{dv_1}$ et $\frac{d\Omega}{dr}$ de la fonction perturbatrice, v_1 désignant la longitude vraie dans l'orbite. Ces deux dérivées peuvent se transformer en fonctions de $\frac{d\Omega}{dx}$ et $\frac{d\Omega}{dy}$, x, y, z, étant les coordonnées orthogonales de la Comète. Les formules qui fournissent l'altération de la latitude ne renferment que $\frac{d\Omega}{dz}$. Ces dérivées ayant été mises sous la forme indiquée, toutes les fonctions à intégrer seront de la forme

(1) P. A. Hansen. *Fundamenta nova Investigationis Orbitæ veræ quam Luna perlustrat.* Gotha 1838.

$$k \left\{ \begin{matrix} \sin. \\ \cos. \end{matrix} \right\} (iu + i'g' + A)\,du\,.$$

ou bien

$$nk \left\{ \begin{matrix} \sin. \\ \cos. \end{matrix} \right\} (iu + i'g' + A)\,dt\,,$$

n représentant le moyen mouvement de la Comète; k et A étant indépendants du temps t. La seconde forme peut se ramener à la première, c'est de celle-ci que M. Hansen s'occupe particulièrement, son intégrale n'ayant pas encore été donnée.

Cette intégrale ne peut avoir d'autre forme que la suivante:

$$\begin{aligned} k\int \cos.(iu + i'g' + A)\,du &= k\alpha'_i \sin.(iu + i'g' + A) \\ (X) \quad &+ k\alpha'_{i+1}\sin.[(i+1)u + i'g' + A] + k\alpha'_{i+2}\sin.[(i+2)u + i'g' + A] + \text{etc.} \\ &+ k\alpha'_{i-1}\sin.[(i-u)u + i'g' + A] + k\alpha'_{i-2}\sin.[(i-2)u + i'g' + A] + \text{etc.} \end{aligned}$$

où les quantités désignées par α sont des facteurs constants. Si maintenant, nous différentions cette expression en ayant égard aux équations

$$g' = n't + c' \quad ; \quad \nu = \frac{n'}{n} \quad ; \quad dt = \frac{1}{n}(1 - e\cos.u)\,du\,,$$

et posant

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\,e\,i'\nu\,,$$

nous aurons une nouvelle équation, qui devant être une identité fournira, en égalant les coefficients des cosinus des mêmes angles, les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &1 = (i + i'\nu)\,\alpha'_i - \lambda\alpha'_{i+1} - \lambda\alpha'_{i-1}\,, \\ (Y) \quad &0 = \lambda\alpha'_i - (i + 1 + i'\nu)\alpha'_{i+1} + \lambda\alpha'_{i+2}\,, \quad 0 = \lambda\alpha'_i - (i - 1 + i'\nu)\alpha'_{i-1} + \lambda\alpha'_{i-2}\,, \\ &0 = \lambda\alpha'_{i+1} - (i + 2 + i'\nu)\alpha'_{i+2} + \lambda\alpha'_{i+3}\,, \quad 0 = \lambda\alpha'_{i-2} - (i - 2 + i'\nu)\alpha'_{i-2} + \lambda\alpha'_{i-3}\,, \\ &\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Or on voit aisément que la loi de ces relations étant fort simple, on pourra en déduire la valeur du rapport $\frac{\alpha'^{+m}_{i+m+1}}{\alpha'^{+m}_{i+m}}$ ou $\frac{\alpha'^{-m}_{i-m-1}}{\alpha'^{-m}_{i-m}}$, sous la forme d'une fraction continue qui toujours devra être convergente, et se calculera facilement. Ayant donc α'_i, qui, après avoir exprimé α'_{i+1} et α'_{i-1}

en fonctions de α^i_i, sera donné par la première des équations précédentes, on pourra obtenir tous les autres facteurs d'intégration α^i_{+1}, α^i_{-1}, α^i_{+2}, α^i_{-2}; etc. On conçoit aussi que ce mode de procéder s'étend immédiatement à l'intégration de $k \sin. (iu + i'g' + \mathrm{A})du$ en changeant dans la formule (X) qui précède, les sinus en cosinus et mettant des signes contraires.

Cette méthode de calculer les facteurs d'intégration est surtout applicable aux cas où λ est petit. Si cette quantité est grande, l'emploi des fractions continues devient pénible, et il vaudra mieux employer un autre procédé, où l'auteur se sert avec avantage de certaines transcendantes introduites par Bessel dans un mémoire sur la *Recherche de la partie des perturbations planétaires qui résulte du mouvement du Soleil* [1].

Il suppose deux quantités x et y, liées l'une à l'autre par l'équation :

$$y = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{i+n} x^n.$$

Si nous la multiplions successivement par k, $\frac{b}{x}$, $\frac{c}{x^2}$, etc., et si nous additionnons les produits, nous obtenons :

$$y\left\{k + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \text{etc.}\right\} = \Sigma_{-\infty}^{+\infty}\left\{k\alpha_{i+n} + b\alpha_{i+n+1} + c\alpha_{i+n+2} + \text{etc.}\right\}x^n.$$

La différentielle de l'équation supposée est :

$$\frac{dy}{dx} = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} n\alpha_{i+n} x^{n-1}.$$

Si nous opérons sur elle comme sur l'intégrale, nous aurons :

$$\frac{dy}{dx}\left\{k'x + b' + \frac{c'}{x} + \text{etc.}\right\} = \Sigma_{-\infty}^{+\infty}\left\{k'n\alpha_{i+n} + b'(n+1)\alpha_{i+n+1} + c'(n+2)\alpha_{i+n+2} + \text{etc.}\right\}x^n.$$

Comparant maintenant ces deux équations avec les relations (Y) de la page précédente, et donnant aux coefficients α_{i+n}, etc., respectivement la signification qu'y ont α^i_{i+n}, etc., il en résultera :

$$\text{(Z)} \qquad \frac{dy}{dx} + y\left\{\frac{i + i'\nu}{x} - \lambda - \frac{\lambda}{x^2}\right\} = \frac{1}{x};$$

[1] *Mémoires de l'Académie de Berlin*, janvier 1824. — Voyez aussi les mêmes *Mémoires*, années 1816—1817, p. 55. *Analytische Auflösung der Keplerschen Aufgabe.*

et vu la manière dont a été obtenue cette équation différentielle linéaire du premier ordre, il s'ensuit que si nous l'intégrons, et si nous développons son intégrale en une série infinie, procédant suivant les puissances entières de x; pour chaque valeur de l'exposant n, le coefficient de x^n sera égal au facteur d'intégration α'_{i+n}, et par conséquent ces facteurs pourront être déterminés par l'intégration.

M. Hansen démontre ici, que si les moyens mouvements n et n' de la Comète et de la planète sont incommensurables, aucun des facteurs d'intégration ne peut devenir infiniment grand. Cette condition est nécessaire pour la solution du problème. Passant à l'intégration de l'équation (Z), il obtient :

$$y = x^{-\omega}\, c^{\lambda\left(x - \frac{1}{x}\right)} \int x^{\omega-1}\, c^{-\lambda\left(x - \frac{1}{x}\right)}\, dx + \text{constante},$$

où c représente la base des logarithmes népériens et $\omega = i + i'\nu$.

Les séries auxquelles équivalent les exponentielles $c^{\lambda\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ et $c^{-\lambda\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ peuvent s'exprimer au moyen des transcendantes I_λ^i semblables à celles que Bessel a appelées I_k^i, pourvu qu'on y fasse $2\lambda = k$, et dont l'expression est :

$$I_k^i = \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^i}{1.2.3.\ldots.i}\left\{1 - \frac{1}{i+1}\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{1}{1.2.(i+1)(i+2)}\left(\frac{k}{2}\right)^4 - \frac{1}{1.2.3(i+1)(i+2)(i+3)}\left(\frac{k}{2}\right)^6 + \text{etc.}\right\}$$

L'intégration s'opère alors aisément, et on obtient :

$$y = \left\{\text{etc.} - I_\lambda^3 x^{-3} + I_\lambda^2 x^{-2} - I_\lambda^1 x^{-1} + I_\lambda^0 + I_\lambda^1 x + I_\lambda^2 x^2 + I_\lambda^3 x^3 + \text{etc.}\right\}$$

$$\times\left\{\text{etc.} - \frac{I_\lambda^3}{\omega+3} x^3 + \frac{I_\lambda^2}{\omega+2} x^2 - \frac{I_\lambda^1}{\omega+1} x + \frac{I_\lambda^0}{\omega} + \frac{I_\lambda^1}{\omega-1} x^{-1} + \frac{I_\lambda^2}{\omega-2} x^{-2} + \frac{I_\lambda^3}{\omega-3} x^{-3} + \text{etc.}\right\}$$

$$+ \text{constante}.$$

On démontre que les coefficients de ces deux séries infinies, dont le produit fournit la valeur de y, doivent toujours converger. Il sera facile d'en déduire les facteurs d'intégration α'_i, α'_{i+1}, etc., quand on connaîtra les valeurs des transcendantes I_λ^i. Ces valeurs sont longues à calculer directe-

ment, aussi l'auteur donne-t-il une table des deux transcendantes I_λ^0 et I_λ^1 depuis $\lambda = 0$ à $\lambda = 10$, qui par une simple interpolation fournira leurs valeurs pour toute valeur de λ comprise entre ces limites. Il montre ensuite que cette table suffit pour obtenir toutes les autres transcendantes correspondant à des valeurs analogues de λ, vu qu'on obtient les relations générales

$$I_\lambda^{i+1} = \frac{i}{\lambda} I_\lambda^i - I_\lambda^{i-1},$$

$$I_\lambda^{i+2} = \frac{i+1}{\lambda} I_\lambda^{i+1} - I_\lambda.$$

Enfin il indique comment on pourra obtenir les valeurs de ces transcendantes, lorsque λ dépasse les limites qui précèdent.

Une fois ces procédés donnés, on se trouve en état d'intégrer les formules qui donnent les variations des coordonnées de la Comète. M. Hansen en fait immédiatement l'application au calcul des perturbations de la Comète d'Encke produites par Saturne, pour tout ce qui dépend de la première puissance des forces perturbatrices. Il compare ensuite ses formules absolues, aux résultats obtenus par M. Encke lui-même, au moyen des quadratures mécaniques. Les différences que fournit cette comparaison se trouvent être d'un ordre de grandeur fort petit, et donnent ainsi une belle vérification de l'exactitude de ses calculs et de la rigueur de son analyse. Mais, encore une fois, remarquons que M. Hansen n'a traité complétement que le premier des cas qu'il a lui-même distingués. Le problème général ne sera résolu, que lorsque le troisième l'aura été aussi. Nous attendrons donc avec impatience l'impression de la seconde partie de son mémoire, où il nous annonce devoir s'en occuper.

SECTION II.

Travaux relatifs à la dernière apparition de la Comète de Halley.

Il était naturel que l'approche d'une nouvelle apparition de la première et de la plus grande Comète reconnue périodique, engageât les astronomes à en fixer l'époque d'une manière précise, et à entreprendre à cet effet le

calcul de ses perturbations. L'importance de cette apparition n'était, il est vrai, plus pour eux aussi grande que celle que le monde savant y attachait en 1759, parce que la théorie de la gravitation, à peine établie et encore contestée à cette époque, devait en tirer une de ses plus fortes preuves d'évidence; cependant de nombreuses questions d'astronomie physique se rattachant à ce phénomène, et l'intéressante vérification des progrès de l'analyse qui pouvait en résulter, devaient suffire pour engager les géomètres à se livrer avec soin aux recherches relatives au dernier retour de cette Comète.

Dès l'année 1809, nous trouvons dans les mémoires de l'Académie des sciences de Paris, la mention d'un mémoire de Burckhardt lu le 10 juillet, où cet astronome rendait compte de ses calculs des perturbations, pour la période comprise entre les deux passages au périhélie de 1759 et 1835 (¹). Pour vérifier et contrôler avec sécurité ses résultats, les Académies de Turin et de Paris mirent au concours cette importante question. A cette occasion MM. Damoiseau et de Pontécoulant publièrent des mémoires qui furent couronnés, le premier en 1818, le second en 1829. Ils renferment tous les deux les calculs complets des perturbations de la Comète pendant ses deux dernières révolutions, avec un exposé sommaire de la méthode employée pour les exécuter, et qui n'est autre que celle de Lagrange et Laplace, dont nous avons parlé longuement dans les chapitres II et III. M. Damoiseau fixe l'instant du passage de la Comète à son périhélie au 4,32 novembre 1835, et M. de Pontécoulant au 7,2 novembre de la même année (²); cette différence entre les résultats d'aussi longs calculs tient à des divergences dans les bases adoptées, c'est-à-dire, dans les éléments des orbites de la Comète et des planètes perturbatrices, ainsi que dans les masses de ces dernières, qui, comme on sait, ont subi fréquemment des corrections notables dans ces derniers temps. M. de Pontécoulant, tenant lui-même compte d'une de ces corrections relative à la masse de Jupiter, fut amené à ajouter 6 jours à sa première détermination. Le passage ne

(¹) Voyez aussi *Conn. des Temps* pour 1819, p. 374.

(²) Voyez *Conn. des Temps* pour 1832, p. 25, pour 1833, p. 104, et pour 1838, p. 67, et *Memorie della Reale Academia delle Scienze di Torino*, t. XXIV, p. 36.

devait plus arriver que le 13, l'observation a donné le 16, c'est-à-dire trois jours seulement de différence.

Cette différence sera encore moindre, si l'on adopte les résultats de M. Rosenberger, professeur à Halle, qui s'est, de son côté, occupé activement du calcul des perturbations de la Comète de Halley, et en a rendu compte d'une manière détaillée dans le journal de M. Schumacher. Tandis que les géomètres français n'avaient tenu compte que de l'influence de la Terre, de Jupiter, de Saturne et d'Uranus, M. Rosenberger affirme (*Astr. Nachr.*, n° 276), que les actions de Vénus, Mercure et Mars, négligées comme insensibles, peuvent produire une accélération de 6 $^1/_5$ jours dans la période de la Comète, savoir 5 $^1/_5$ jours du fait de Vénus, et un jour par les attractions combinées de Mars et de Mercure. Nous nous arrêterons un moment sur les travaux de ce savant distingué, et sur les détails qu'il donne [1] quant à la méthode par laquelle on rapporte le mouvement d'une Comète non plus au centre du Soleil, mais au centre de gravité du système solaire, considéré comme foyer de son orbite. Nous avons déjà vu Clairaut employer cet artifice pour simplifier ses calculs (page 10), et nous avons annoncé que nous donnerions par la suite les formules des géomètres modernes qui y sont relatives : voici donc celles de M. Rosenberger, qu'il donne d'après les préceptes de Bessel.

Appelons, comme précédemment, x, y, z les coordonnées de la Comète rapportées à un système d'axes rectangulaires se coupant au centre du Soleil ; x', y', z', x'', y'', z''.... les coordonnées des planètes troublantes m', m''... ; la lettre r désignera toujours le rayon vecteur de la Comète, r', r''... ceux des planètes, ρ, ρ'... les distances de celles-ci à la Comète ; nous poserons $'p''$ égal à la troisième puissance de la distance des deux planètes m', m'' et ainsi de suite. Soient enfin $\overline{\mathrm{X}}$, $\overline{\mathrm{Y}}$, $\overline{\mathrm{Z}}$ les coordonnées du centre de gravité de notre système solaire, en sorte que

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{m'x' + m''x'' + m'''x''' + \text{etc.}}{1 + \mathrm{M}},$$

où $\quad \mathrm{M} = m' + m'' + m''' + \text{etc.}, \quad$ et la masse du Soleil $= 1$.

[1] *Astronomische Nachrichten*, t. XI, n° 250.

Les équations qui déterminent le mouvement de la Comète et des planètes autour du Soleil seront :

$$(\delta)\quad o=\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{x}{r^3}+\frac{m'x'}{r'^3}+\frac{m'(x-x')}{\rho^3}+\frac{m''x''}{r''^3}+\frac{m''(x-x'')}{\rho'^3}+\text{etc.}$$

$$(\delta')\quad o=\frac{d^2x'}{dt^2}+\frac{(1+m')x'}{r'^3}+\frac{m''x''}{r''^3}+\frac{m''(x'-x'')}{{}'\rho''}+\frac{m'''x'''}{r'''^3}+\frac{m'''(x'-x''')}{{}'\rho'''}+\text{etc.}$$

$$(\delta'')\quad o=\frac{d^2x''}{dt^2}+\frac{(1+m'')x''}{r''^3}+\frac{m'x'}{r'^3}+\frac{m'(x''-x')}{{}'\rho''}+\frac{m'''x'''}{r'''^3}+\frac{m'''(x''-x''')}{{}''\rho'''}+\text{etc.}$$

etc.

et d'analogues en y, z, y', z', etc. Si l'on multiplie les équations (δ'), (δ'')... respectivement par $\frac{m'}{1+M}$, $\frac{m''}{1+M}$, etc., leur somme devient :

$$o=\frac{d^2\overline{X}}{dt^2}+\frac{m'x'}{r'^3}+\frac{m''x''}{r''^3}+\frac{m'''x'''}{r'''^3}+\text{etc.}$$

Si en outre nous posons :

$$x=\overline{X}+\xi\ ,\quad y=\overline{Y}+\eta\ ,\quad z=\overline{Z}+\zeta\ ,$$
$$x'=\overline{X}+\xi'\ ,\quad y'=\overline{Y}+\eta'\ ,\quad z'=\overline{Z}+\zeta'\ .$$

etc.

ξ, η, ζ, ξ', η', ζ', ξ'', etc., étant les coordonnées de la Comète et des planètes, rapportées à un système d'axes se croisant au centre de gravité et parallèles aux premiers, et si l'on retranche cette équation de la relation (δ), on obtient :

$$o=\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{x}{r^3}+\frac{m'(x-x')}{\rho^3}+\frac{m''(x-x'')}{\rho'^3}+\frac{m'''(x-x''')}{\rho''^3}+\text{etc.}$$

Equation, qui avec les deux anologues en η et ζ, détermine le mouvement de la Comète autour du centre de gravité du système solaire. Elle est identique avec celle-ci :

$$o=\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{\overline{X}+\xi}{r^3}+\frac{m'(\xi-\xi')}{\rho^3}+\frac{m''(\xi-\xi'')}{\rho'^3}+\text{etc.}$$

Et comme $\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)$, en désignant par R la distance de la Comète à la nouvelle origine, on peut encore l'écrire :

$$(\varepsilon) \qquad 0 = \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\overline{X}+\xi}{R^3} + (\overline{X}+\xi)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) + \frac{m'(\xi-\xi')}{\rho^3} + \frac{m''(\xi-\xi'')}{\rho'^3} + \text{etc.}$$

ou enfin, en mettant $m'\xi' + m''\xi'' + m'''\xi''' +$ etc., à la place de $\overline{X}$.

$$(\zeta) \qquad 0 = \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\xi(1+M)}{R^3} + (\xi+\overline{X})\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) + m'(\xi'-\xi)\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) + m''(\xi''-\xi)\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{\rho'^3}\right) + \text{etc.}$$

Le mouvement de la Comète autour du centre de gravité du système sera donc le même, que si ce point était le siége d'une force centrale égale à $1+M$, et qu'en même temps elle fût sollicitée par les forces perturbatrices suivantes, A, B et C, parallèles aux axes coordonnés :

$$A = (\xi+\overline{X})\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) + m'(\xi'-\xi)\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) + m''(\xi''-\xi)\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{\rho'^3}\right) + \text{etc.}$$

$$(\eta) \qquad B = (\eta+\overline{Y})\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) + m'(\eta'-\eta)\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) + m''(\eta''-\eta)\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{\rho'^3}\right) + \text{etc.}$$

$$C = (\zeta+\overline{Z})\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) + m'(\zeta'-\zeta)\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) + m''(\zeta''-\zeta)\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{\rho'^3}\right) + \text{etc.}$$

Si la distance de la Comète au Soleil n'est pas trop petite, on pourra facilement exprimer $\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)$ au moyen d'une série très-convergente, et ce n'est que dans ce cas là, qu'en général le mouvement de la Comète doit être rapporté au centre de gravité, et qu'on doit faire usage des équations (ζ). En effet on a alors :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + 2P + \overline{R}^2,$$

où

$$P = \xi\overline{X} + \eta\overline{Y} + \zeta\overline{Z} \; ; \quad \overline{R}^2 = \overline{X}^2 + \overline{Y}^2 + \overline{Z}^2,$$

et par conséquent P et $\overline{R}$ sont de l'ordre des masses perturbatrices. On en déduit :

$$(\xi + \overline{X})\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) = \frac{-3P.\xi}{R^5} - \frac{3P\overline{X}}{R^5} + \frac{15}{2}\cdot\frac{P^2.\xi}{R^7} - \frac{3}{2}\cdot\frac{\overline{R}^2.\xi}{R^7} \text{ etc.}$$

et de là pour les expressions des forces troublantes :

$$A = \left[m'(\xi'-\xi)\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{\rho^3}\right) + m''(\xi''-\xi)\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{\rho'^3}\right) + \text{etc.} - \frac{3P\xi}{R^5}\right]$$
$$- \frac{3P.\overline{X}}{R^5} + \frac{15}{2}\frac{P^2\xi}{R^7} - \frac{3}{2}\frac{\overline{R}^2.\xi}{R^5}\ \text{etc.}$$

$$B = \left[m'(\eta'-\eta)\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{\rho^3}\right) + m''(\eta''-\eta)\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{\rho'^3}\right) + \text{etc.} - \frac{3P\eta}{R^5}\right]$$
$$- \frac{3P.\overline{Y}}{R^5} + \frac{15}{2}\frac{P^2.\eta}{R^7} - \frac{3}{2}\frac{R^2.\eta}{R^5} + \text{etc.}$$

$$C = \left[m'(\zeta'-\zeta)\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{\rho^3}\right) + m''(\zeta''-\zeta)\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{\rho'^3}\right) + \text{etc.} - \frac{3P\zeta}{R^5}\right]$$
$$- \frac{3P.\overline{Z}}{R^5} + \frac{15}{2}\frac{P^2.\zeta}{R^7} - \frac{3}{2}\frac{\overline{R}^2.\zeta}{R^5}$$

Très-souvent il suffira de ne considérer que les termes compris entre les parenthèses $[\ ]$.

Déterminons maintenant la direction arbitraire des axes coordonnés, de manière que le plan des $\xi\eta$ coïncide avec celui de l'orbite de la Comète autour du centre de gravité pour l'instant du calcul, et l'axe des ξ avec son rayon vecteur ; on aura $\xi = R$, $\eta = \zeta = 0$, $P = R\overline{X}$, et on déterminera par le moyen des équations (d) à (i) du chapitre précédent, les variations des éléments de l'orbite de la Comète rapportée au centre de gravité du système. On posera à cet effet $\mu = 1 + M$, et appelant A', B', C' les forces perturbatrices dans les directions déterminées, elles prendront la forme suivante :

$$A' = m'(\xi'-R)\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{\rho^3}\right) - \frac{3m'\xi'}{R^3} + m''(\xi''-R)\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{\rho'^3}\right) - \frac{3m''\xi''}{R^3} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{3}{2}(2\overline{X}^2 - \overline{Y}^2 - \overline{Z}^2)\frac{1}{R^4}$$

$$(l)\quad B' = m'\eta'\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{\rho^3}\right) + m''\eta''\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{\rho'^3}\right) + \text{etc.} - \frac{3\overline{X}\overline{Y}}{R^4}$$

$$C' = m'\zeta'\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{\rho^3}\right) + m''\zeta''\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{\rho'^3}\right) + \text{etc.} - \frac{3\overline{X}\overline{Z}}{R^4}.$$

L'avantage que présente cet ordre de calcul, consiste en ce que les parties des forces perturbatrices A′, B′, C′ qui dépendent des petites planètes, diminuent parfois tellement, qu'on peut sans danger les négliger entièrement. Pour la Comète de Halley, qui se trouve la plupart du temps à de très-grandes distances du Soleil, cet avantage est encore accru, en ce que les perturbations qu'elle éprouve de la part de Jupiter, Saturne et Uranus, au moins dans la plus grande partie de son orbite, sont beaucoup moindres et plus aisées à calculer, si l'on rapporte son mouvement au centre de gravité du système solaire, que si on voulait calculer immédiatement les variations de ses éléments par rapport au centre du Soleil.

Ces formules pour rapporter le mouvement d'une Comète au centre de gravité du système solaire étant données, il est nécessaire encore d'indiquer une méthode par laquelle on puisse déduire les éléments qui déterminent le mouvement de la Comète autour de ce centre de gravité, des éléments de son orbite autour du Soleil et vice versà. Cette méthode s'obtient facilement par la considération des intégrales premières du mouvement elliptique, dont nous avons déjà fait usage pour en conclure les formules des variations des éléments, pour la déduction desquelles nous avons renvoyé à la *Mécanique Céleste*, liv. II, § 18. Ces intégrales donnent, comme on sait, les constantes du mouvement elliptique d'un corps céleste, autour du foyer de son orbite, en fonctions des coordonnées relatives à ce point, et des composantes de sa vitesse, parallèles aux axes coordonnés. Si on applique ces équations aux deux orbites en question, il est évident que la différence des deux systèmes d'éléments s'en déduira immédiatement. Cette opération est essentielle, parce qu'il n'est point avantageux de transporter le centre d'attraction du centre du Soleil au centre de gravité du système dans le calcul des perturbations pour l'orbite entière de la Comète. Ce n'est qu'à partir d'un certain écartement de la Comète au Soleil, comparé à celui de la planète troublante au même corps, qu'il sera convenable de changer l'origine des axes de place, et souvent même ce déplacement se fera successivement pour les différentes planètes perturbatrices, ou du moins pour les différents groupes de ces planètes. Le grand avantage de rapporter le mouvement au centre de gravité du système, qui ne subit aucun dérangement par le fait des attractions réciproques, réside en ce que la partie de la force perturbatrice qui, dans la forme ordinaire, dérive de l'action de la

planète troublante sur le Soleil, disparaît. Outre cela, les termes où entrent les coordonnées de la planète perturbatrice s'annullent, ou du moins diminuent considérablement, en exceptant cependant l'influence qu'elles ont sur la détermination de la distance des corps troublant et troublé. Si donc de prompts changements de ces coordonnées exigeaient, avec la forme ordinaire, de très-petits intervalles dans le calcul des variations des éléments, il suffira de les calculer pour des espaces de temps beaucoup plus considérables après cette transformation.

M. Rosenberger nous dit lui-même que l'exactitude de ses calculs, relatifs à la Comète de Halley, aurait été, en partie du moins, tout à fait illusoire, ou la complication de leur exécution entièrement insurmontable s'il n'avait fait usage de cette méthode, dont la première indication se trouve dans la pièce de M. Argelander sur la Comète de 1811, déjà citée p. 86, et que cet auteur distingué nous annonce lui avoir été transmise par son illustre maître Bessel.

C'est un travail de ce grand astronome qu'il nous reste encore à analyser. Il a été publié en 1836 dans les *Astronomische Nachrichten* (n° 313 et suivants) sous le titre : *Beitrag zu den Methoden die Störungen der Kometen zu berechnen*, et nous le mentionnons ici, parce que son auteur y a joint comme application le calcul des perturbations de la Comète de Halley produites par la Terre. Il a choisi l'influence de la Terre comme exemple plutôt que celle de Jupiter, en raison de ce que ses procédés s'appliquent plus particulièrement à la détermination des perturbations qui sont produites par les planètes les moins éloignées du Soleil, et pour la partie supérieure de l'orbite des Comètes. Voici les principales idées qui forment la base de sa méthode.

Si on donne au coefficient différentiel d'un élément e de l'orbite de la Comète la forme suivante :

$$(M) \qquad \frac{de}{dt} = p^{0} + p'\cos.n't + p''\cos.2n't + p'''\cos.3n't + \ldots$$
$$+ q'\sin.n't + q''\sin.2n't + q'''\sin.3n't\ldots,$$

expression dans laquelle $n't$ représente l'anomalie moyenne de la planète troublante, dont nous considérons l'influence seule, et où $p, p', p'', \ldots$ $q', q'' \ldots$ sont des fonctions du temps et des éléments des deux orbites ; on

aura la variation de l'élément c pendant un temps déterminé, en prenant l'intégrale de cette expression pour toute l'étendue de cet intervalle :

$$\delta c = \int p^0 . dt + \int (p' \cos. n't + q' \sin. n't)\, dt + \int (p'' \cos. 2n't + q'' \sin. 2n't)\, dt + \text{etc.}$$

Or, on peut développer les intégrales des termes de cette expression, qui renferment les sinus et cosinus de l'anomalie moyenne et de ses multiples, en séries dont la convergence dépend de celle de la suite des coefficients différentiels de p', q', p'', q''..... Si, en effet, on leur donne la forme :

$$\int (p' \cos. n't + q' \sin. n't)\, dt = \mathrm{P}' \cos. n't + \mathrm{Q}' \sin. n't$$

$$\int (p'' \cos. 2n't + q'' \sin. 2n't)\, dt = \mathrm{P}'' \cos. 2n't + \mathrm{Q}'' \sin. 2n't,$$

on obtient en différentiant la première de ces formules, et en égalant respectivement les coefficients des mêmes lignes trigonométriques :

$$p' = \frac{d\mathrm{P}'}{dt} + n'\mathrm{Q}' \;;\quad q' = \frac{d\mathrm{Q}'}{dt} - n'\mathrm{P}'.$$

Eliminant $\frac{d\mathrm{P}'}{dt}$ et $\frac{d\mathrm{Q}'}{dt}$ par la comparaison de ces deux équations avec leurs différentielles, on aura :

$$\frac{p'}{n'} + \frac{1}{n'^2} \cdot \frac{dq'}{dt} = \mathrm{Q}' + \frac{1}{n'^2} \cdot \frac{d^2\mathrm{Q}'}{dt^2} \;;\; -\frac{q'}{n'} + \frac{1}{n'^2} \cdot \frac{dp'}{dt} = \mathrm{P}' + \frac{1}{n'^2} \cdot \frac{d^2\mathrm{P}'}{dt^2}.$$

Si l'on différentie ces deux équations 2, 4, 6... fois, et qu'on en chasse chaque fois le coefficient différentiel de l'ordre le plus élevé par la différentiation suivante, on en déduit :

$$\mathrm{P}' = -\frac{q'}{n'} + \frac{1}{n'^3} \cdot \frac{d^2q'}{dt^2} - \frac{1}{n'^5} \cdot \frac{d^4q'}{dt^4} + \dots + \frac{1}{n'^2} \cdot \frac{dp'}{dt} - \frac{1}{n'^4} \cdot \frac{d^3p'}{dt^3} + \frac{1}{n'^6} \cdot \frac{d^5p'}{dt^5} - \text{etc.}$$

$$\mathrm{Q}' = \frac{p'}{n'} - \frac{1}{n'^3} \cdot \frac{d^2p'}{dt^2} + \frac{1}{n'^5} \cdot \frac{d^4p'}{dt^4} - \dots + \frac{1}{n'^2} \cdot \frac{dq'}{dt} - \frac{1}{n'^4} \cdot \frac{d^3p'}{dt^3} + \frac{1}{n'^6} \cdot \frac{d^5p'}{dt^5} - \text{etc.}$$

formules qui donneront évidemment P'', Q'', P''', Q''', etc., si au lieu de p', q', n' on écrit respectivement p'', q'', $2n'$; p''', q''', $3n'$; etc.

On peut employer cette intégration des termes périodiques de l'expression de dc, quand les valeurs de p', q', p'', q''.... et de leurs coefficients différentiels sont connus pour les deux limites du temps, et si les séries qui expriment P$'$, Q$'$, P$''$, Q$''$, etc. sont convergentes. Le terme indépendant de la position de la planète troublante doit être intégré à part et par une méthode différente. Il s'agit donc, pour le moment, de trouver le moyen de connaître P$'$, Q$'$, P$''$, Q$''$, etc.

Pour cet effet, Bessel rapporte ses positions à un système d'axes rectangulaires, ayant leur origine au centre du Soleil, dont l'un coïncide avec le rayon vecteur de la Comète, et le second situé dans le plan de l'orbite est perpendiculaire à ce rayon vecteur. Il décompose suivant ces trois axes la force perturbatrice, et transforme les expressions des composantes en fonctions des anomalies vraies φ et φ' des corps troublé et troublant; prenant ensuite les formules des variations des éléments, il y substitue ces expressions, et obtient ainsi les coefficients différentiels de ces éléments en fonctions de ces deux variables. Pour les mettre, maintenant, sous la forme (M), on se servira de l'interpolation. On combinera les valeurs connues de φ et r correspondant à un certain instant donné, avec un nombre m de valeurs de $n't$

$$= 0 \,, \quad \frac{2\pi}{n} \,, \quad 2.\frac{2\pi}{n} \,, \quad 3.\frac{2\pi}{n} \,, \ldots (n-1)\frac{2\pi}{n} \,.$$

Pour chacune de ces m valeurs, on calculera les termes des formules précédentes qui renferment φ' et r', et que Bessel a réunis pour simplifier sous trois formes seulement, qui reparaissent les mêmes dans les différentes équations; on cherchera ensuite la formule périodique qui s'adapte aux m valeurs de chacune de ces expressions. Si m a été pris assez grand pour que les premiers termes seuls de ces expressions soient sensibles, on a obtenu le développement cherché; on aura ainsi, pour un temps donné τ, les développements des coefficients différentiels des éléments de l'orbite, sous une forme analogue à l'expression (M). On en déduira ceux de leurs propres coefficients différentiels des divers ordres, après avoir calculé l'expression de $\frac{dc}{dt}$, non pas seulement pour le temps τ où doit commencer l'intégrale δc, mais pour les instants :

$$\ldots \tau-3 \,, \tau-2 \,, \tau-1 \,, \tau \,, \tau+1 \,, \tau+2 \,, \tau+3 \ldots$$

C'est de la suite des valeurs de chaque coefficient et de leurs différences, qu'on pourra extraire ces coefficients différentiels. Toutes les quantités nécessaires pour calculer P′, Q′, P″, Q″.... seront ainsi connues. L'emploi de cette intégration des termes périodiques des variations des éléments dépend de la convergence des séries qui expriment P′, Q′, P″, Q″.... Celle-ci sera évidemment d'autant plus grande que la Comète à l'époque τ, sera plus éloignée de son périhélie, et son mouvement plus lent et plus uniforme.

Quant au terme de l'expression (M) de δc qui est indépendant des sinus et cosinus de l'anomalie moyenne de la planète perturbatrice, nous trouvons son influence calculée et exprimée au moyen de formules dans l'ouvrage de Gauss : *Determinatio Attractionis*, etc., Gottingæ 1818 ; cependant, dans le cas qui nous occupe, les distances de la Comète au Soleil étant beaucoup plus grandes que celles de la planète troublante au même astre, on peut profiter de cette circonstance pour le calcul, et voici comment. Nous avons vu que les composantes de la force perturbatrice parallèles aux axes, sont fonctions des coefficients différentiels de la quantité R (p. 57). Poisson [1] a exprimé les variations des éléments au moyen des coefficients différentiels de la même fonction, pris relativement aux éléments mêmes de l'orbite, d'après ses propres travaux et ceux de Lagrange et Laplace. Le terme de cette fonction indépendant de $n't$, que nous avons seul à considérer dans ces formules, est :

$$\frac{m'}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}-\frac{1}{\rho}\right)d.n't.$$

La première partie en disparaît évidemment, et il se réduit à

$$-\frac{m'}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d.n't}{\rho},$$

ou, à cause de $d.n't=(1-e'\cos.u')\,du'=\frac{r'}{a'}\,du'$:

$$-\frac{m'}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r'}{a'\rho}\,du',$$

[1] *Journal de l'Ecole Polytechnique*, t. VIII, p. 308.

u' étant l'anomalie excentrique de la planète. La portion de R qui seule est à considérer ici, est la partie du développement de $\frac{m'r'}{a'\rho}$ procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de u', qui est indépendante de l'anomalie excentrique u'.

Si l'on développe $\frac{1}{\rho}$, qui en raison du système d'axes adopté vaut $\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rx' + r'^2}}$, en une série de la forme :

$$\frac{U^0}{r} + \frac{a'U^{(1)}}{r^2} + \frac{a'^2U^{(2)}}{r^3} + \frac{a'^3U^{(3)}}{r^4} + \ldots$$

procédant suivant les puissances de $\frac{1}{r}$, et qu'on désigne par V^0, $a'V^{(1)}$, $a'^2V^{(2)}$,.... la partie des produits des dénominateurs de ses différents termes, multipliée par $\frac{a'}{r'} = 1 - e\cos. u'$, qui est indépendante de u', la portion de R que nous aurons à considérer ici sera :

$$-m'\left\{\frac{V^0}{r} + \frac{a'V^{(1)}}{r^2} + \frac{a'^2V^{(2)}}{r^3} + \text{etc.}\right\}.$$

Bessel donne le développement complet de cette partie de R, indépendante de la position de la planète perturbatrice, jusqu'à la sixième puissance de $\frac{1}{r}$; cette approximation est le plus souvent plus que suffisante pour le calcul des variations des éléments, en particulier pour l'exemple auquel il fait l'application de sa méthode, et où il considère les perturbations de la Comète de Halley produites par la Terre.

Comme les coefficients différentiels des éléments, pris par rapport au temps, sont exprimés en fonctions des coefficients différentiels de R, pris relativement aux éléments, et que l'intégration des premiers doit être prise pour tout l'intervalle de temps, pour la durée duquel on veut déterminer les variations des éléments, on peut arbitrairement : ou bien différentier d'abord R par rapport aux éléments et intégrer ensuite relativement au temps, ou bien faire précéder l'intégration et ensuite différentier l'intégrale ob-

tenue. C'est cette dernière voie qu'a suivie l'auteur; il a donc cherché d'abord :

$$m'\text{H} = \int \text{R}dt = \frac{1}{\sqrt{a(1-e^2)}} \int \text{R}r^2.d\varphi\,;$$

ou, remplaçant R par la série obtenue, dans laquelle le terme qui renferme $\text{V}^{(4)}$ est déjà insensible, et mettant pour r sa valeur $\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos.\varphi} = \frac{h^2}{1+e\cos.\varphi}$

$$\text{H} = -h.\int \frac{\text{V}^0 d\varphi}{1+e\cos.\varphi} - \frac{a'}{h}\int \text{V}^{(1)}d\varphi.$$

$$-\frac{a'^2}{h^3}\int \text{V}^{(2)}(1+e\cos.\varphi)\,d\varphi - \frac{a'^3}{h^5}\int \text{V}^{(3)}(1+e\cos.\varphi)^2\,d\varphi.$$

Différentiant ensuite cette expression, par rapport aux éléments qui entrent dans les formules des variations, il obtient directement les altérations des éléments de la Comète pour le commencement et la fin de l'intégrale; leur différence donnera la partie des perturbations de la Comète indépendante de la position variable de la planète perturbatrice, pour le temps auquel s'étend l'intégrale calculée. Il applique immédiatement ces procédés à l'exemple indiqué, et remarque qu'ils peuvent s'employer également, soit qu'on rapporte le mouvement de la Comète au centre du Soleil, ou au centre de gravité des corps attirants.

Dans une seconde section de son travail, Bessel expose une méthode approximative pour la détermination des perturbations des Comètes lorsqu'elles se trouvent à de grandes distances du Soleil, méthode qui facilite et abrége beaucoup les calculs, tout en écartant très-peu de la réalité. Elle est fondée sur la remarque que nous avons faite (p. 27) avec d'Alembert et Lagrange, qu'une Comète qui est beaucoup plus éloignée du Soleil que la planète perturbatrice, se meut à très-peu près autour du centre commun de gravité de ces deux corps, comme si elle était attirée vers ce point par leurs deux masses réunies. Si donc, comme à la page 110, je rapporte le mouvement de la Comète à ce centre de gravité, ne considérant l'influence que d'une planète troublante, et que j'appelle x_1, y_1, z_1, r_1 les coordonnées de la Comète relatives à un système d'axes se coupant en ce point,

j'aurai pour équations de son mouvement des relations de la forme [1] :

$$o = \frac{d^2x^1}{dt^2} + (1+m')\frac{x_1}{r_1^3} + \left(x_1 + \frac{m'}{1+m'}x'\right)\frac{1}{r^3} - (1+m')\frac{x_1}{r_1^3} + \left(m'x_1 + \frac{m'}{1+m'}x'\right)\frac{1}{\rho^3}$$

et d'analogues en y_1 et z_1. Si j'y introduis la fonction

$$R_1 = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} + m'\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\rho}\right),$$

les mêmes équations deviennent :

$$o = \frac{d^2x_1}{dt^2} + (1 + m')\frac{x_1}{r_1^3} + \frac{dR_1}{dx_1}$$

etc.

Si maintenant on développe R_1 d'après les puissances de $\frac{1}{r_1}$, on trouve que le développement commence avec le cube de cette fonction, tandis que celui de la fonction R employée dans le mouvement autour du Soleil renferme déjà $\frac{1}{r}$. En rapportant le mouvement de la Comète au centre de gravité, on voit donc que les deux premières puissances de $\frac{1}{r}$ disparaissent; c'est dans cet amoindrissement de la force perturbatrice, et partant des perturbations, que réside l'avantage de ce changement dans l'origine des axes. La nouvelle approximation que propose Bessel, consiste maintenant à ne prendre dans le développement de R_1 procédant suivant les puissances de $\frac{1}{r_1}$, que le terme en $\frac{1}{r_1^3}$, et de chercher les corrections des éléments qui résultent de sa prise en considération. Il donne fort au long tous les développements et les formules nécessaires à ces calculs; mais nous ne le suivrons pas dans ces détails, que les limites de cet écrit ne nous permettent pas d'aborder.

(1) Ces équations se déduisent immédiatement des deux correspondantes du mouvement de la planète et de la Comète rapportées au centre du Soleil, en y faisant :

$$x = x_1 + \frac{m'}{1+m'}x', \quad y = y_1 + \frac{m'}{1+m'}y', \quad z = z_1 + \frac{m'}{1+m'}z'.$$

CHAPITRE CINQUIÈME.

Méthode pour obtenir les formules générales des perturbations d'une Comète dont on a observé plusieurs apparitions.

Si nous récapitulons les méthodes, que nous venons d'examiner, pour le calcul du mouvement troublé des Comètes, nous voyons qu'elles diffèrent pour les diverses parties de l'orbite que l'on considère. L'intégration des formules, qui expriment les variations des éléments, par les quadratures mécaniques fournit, il est vrai, un moyen sûr de calculer les perturbations pour toutes les positions de la Comète; mais des procédés simplifiant les calculs fort longs qu'elles exigent, ont été donnés pour les portions extrêmes de l'orbite, c'est-à-dire pour la partie qui avoisine le Soleil, et pour celle qui, au contraire, en est beaucoup plus distante que les planètes perturbatrices. Dès que la Comète s'approchera de celles-ci, il faudra recourir toutefois aux quadratures, dès lors renoncer à obtenir une expression analytique des perturbations, et se résoudre à reprendre pour chaque nouvelle apparition un calcul, qui de l'aveu des plus éminents géomètres *n'a jamais de fin.* Cette conclusion n'est-elle cependant pas un peu précipitée, et devons-nous abandonner la pensée d'obtenir des formules générales pour le mouvement troublé des Comètes? C'est la question que nous nous proposons d'examiner dans ce chapitre, en nous occupant particulièrement du cas, où l'on a observé plusieurs apparitions successives de la même Comète et exécuté pour chacune d'elles le calcul de ses perturbations relatives.

Nous avons vu, p. 116, Bessel arriver par l'interpolation à exprimer, en séries procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de la longitude moyenne de la planète troublante, les coefficients différentiels, pris par rapport au temps, des variations des éléments, pour le cas particulier où l'on considère une Comète dans la partie de son orbite, où elle se trouve à

de beaucoup plus grandes distances du Soleil que l'astre perturbateur. La grandeur des excentricités et des inclinaisons des orbites cométaires, empêche d'étendre ces procédés à leur trajectoire tout entière, mais on sait que dans la théorie des planètes ils sont d'un emploi fréquent et avantageux.

L'interpolation a en général pour but, de trouver l'expression générale d'une fonction d'une ou de plusieurs variables, au moyen d'un certain nombre de valeurs déterminées de cette fonction, correspondantes à des valeurs connues de la ou des variables qu'elle renferme. Ainsi la fonction perturbatrice R (p. 56), qui se développe algébriquement dans la théorie des planètes en une série procédant suivant les sinus et cosinus des multiples des longitudes ou anomalies moyennes des astres troublé et troublant, et dont les coefficients des différents termes renferment les puissances ascendantes des excentricités des mêmes astres (*Méc. Cél.*, liv. II, n° 48 et suivants), peut aussi s'obtenir par les formules d'interpolation, de même que ses dérivées.

Désignons en effet par ζ et ζ' les deux anomalies moyennes, qui entrent comme variables dans la composition de la fonction R; nous pourrons poser $R = f(\zeta, \zeta')$. La question est de trouver l'expression générale de son développement, au moyen d'un nombre suffisant q de valeurs numériques de la fonction, valeurs qui se calculeront au moyen de sa forme ordinaire,

$$R = m' \left\{ \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} - \frac{1}{\rho} \right\},$$

ou

$$R = m' \left\{ r^2 + r'^2 - 2rr's \right\}^{-\frac{1}{2}} - \frac{rs}{r'^2};$$

appelant s le cosinus de l'angle compris entre les deux rayons vecteurs r et r', et qui est fonction des anomalies ou longitudes des deux planètes, en donnant à ces anomalies ou longitudes les valeurs particulières qu'on jugera convenables.

Donnant premièrement à ζ' une valeur particulière i, la fonction $R^{(i)}$ correspondante, ne contiendra plus que la seule variable ζ, et se mettra sous la forme :

$$\begin{aligned} R^{(i)} = B_0^{(i)} + B_1^{(i)} \cos.\zeta + B_2^{(i)} \cos.2\zeta + B_3^{(i)} \cos.3\zeta + \text{etc.} \\ + A_1^{(i)} \sin.\zeta + A_2^{(i)} \sin.2\zeta + A_3^{(i)} \sin.3\zeta + \text{etc.} \end{aligned}$$

Si nous donnons à ζ', de même, q valeurs différentes, nous obtiendrons q valeurs correspondantes de la fonction R, et par là q équations propres à déterminer autant de coefficients B_0, A_1, B_1, A_2, etc. Mais chacun de ces coefficients est fonction de valeurs particulières de ζ'; pour avoir son expression générale, il faudra donc refaire à son sujet la même série d'opérations, c'est-à-dire donner à ζ des valeurs particulières et en déduire les valeurs correspondantes de R en fonctions de la variable ζ' seule. On arrivera ainsi à q systèmes de q équations à q inconnues, pour la résolution desquelles on a recours aux formules d'interpolation, sous peine d'être entièrement arrêté par l'extrême complication des calculs. Voici celles que M. Liouville a résumées dans son *Journal de Mathématiques*, année 1836, page 206, et qui fournissent immédiatement les valeurs des divers coefficients des développements qui précèdent. Elles se déduisent promptement de la théorie des équations binomes.

Cette théorie nous fournit par la résolution de l'équation $x^q - 1 = o$, q valeurs de l'expression $\sqrt[q]{1}$ qui sont :

$$1\,,\quad \cos.\frac{2\pi}{q} + \sqrt{-1}.\sin.\frac{2\pi}{q}\,,\quad \cos.\frac{4\pi}{q} + \sqrt{-1}.\sin.\frac{4\pi}{q}\ \ldots.$$

$$\cos.\frac{2(q-1)\pi}{q} + \sqrt{-1}.\sin.\frac{2(q-1)\pi}{q}\,.$$

La somme des $p^{\text{èmes}}$ puissances de ces racines devra être nulle, si p est différent de q ou d'un de ses multiples, car cette somme doit être égale au coefficient du second terme de l'équation, et ce second terme n'existe pas. Elle devra être égale à q, si p est égal à q ou à l'un de ses multiples, car c'est la condition même par laquelle ces racines ont été déterminées : chacune d'elles élevée à la puissance q doit reproduire l'unité, et par conséquent aussi, si on l'élève à une puissance marquée par un multiple de q.

On a donc, en supposant $p > o$ et différent de q, $2q$, $3q$, etc.,

$$1 + \left(\cos.\frac{2\pi}{q} + \sqrt{-1}.\sin.\frac{2\pi}{q}\right)^p + \left(\cos.\frac{4\pi}{q} + \sqrt{-1}.\sin.\frac{4\pi}{q}\right)^p + \ldots.$$

$$\ldots. + \left(\cos.\frac{2(q-1)\pi}{q} + \sqrt{-1}.\sin.\frac{2(q-1)\pi}{q}\right)^p = o\ ;$$

ou en vertu de la formule de Moivre, égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire :

$$1 + \cos.\frac{2p\pi}{q} + \cos.\frac{4p\pi}{q} + \cos.\frac{6p\pi}{q} + \ldots + \cos.\frac{2(q-1)p\pi}{q} = o$$

$$\sin.\frac{2p\pi}{q} + \sin.\frac{4p\pi}{q} + \sin.\frac{6p\pi}{q} + \ldots + \sin.\frac{2(q-1)p\pi}{q} = o.$$

La seconde équation existe aussi pour $p = o$, ou pour p égal à l'un des multiples de q.

Cela posé, reprenons l'équation

$$(x) \qquad R = f(\zeta) = B_0 + \Sigma B_p \cos. p\zeta + \Sigma A_p \sin. p\zeta;$$

faisons-y successivement $\zeta = o$, $\zeta = \frac{2\pi}{q}$, $\zeta = \frac{4\pi}{q} \ldots \zeta = \frac{2(q-1)\pi}{q}$ et ajoutons tous les résultats obtenus. Les coefficients de B_0, B_q, B_{2q}, etc. seront égaux à q, et ceux des autres termes seront nuls, on aura donc :

$$q(B_0 + B_q + B_{2q} + \text{etc.}) = f(o) + f\left(\frac{2\pi}{q}\right) + f\left(\frac{4\pi}{q}\right) + \ldots + f\left(\frac{2(q-1)\pi}{q}\right)$$

et si les coefficients B_q, B_{2q}, etc. sont négligeables, on en déduira la valeur du premier, B_0, égale à la somme des valeurs particulières du second membre divisées par q :

$$B_0 = \frac{1}{q}\left\{f(o) + f\left(\frac{2\pi}{q}\right) + f\left(\frac{4\pi}{q}\right) + \ldots + f\left(\frac{2(q-1)\pi}{q}\right)\right\}.$$

Généralement, si on représente l'expression

$$\varphi(o) + \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(q-1) \quad \text{par} \quad \Sigma^q \varphi(\mu),$$

on pourra écrire :

$$B_0 = \frac{1}{q}\Sigma^q f\left(\frac{2\mu\pi}{q}\right),$$

quelle que soit la fonction $f(\mu)$. — Voilà pour le premier coefficient du développement de R, voyons maintenant l'expression d'un coefficient d'ordre quelconque, A_p et B_p par exemple.

Si dans l'équation (x) qui précède, nous remplaçons p par p_1, et

que nous considérions p comme une valeur particulière de p_1, elle devient :

$$f(\zeta) = B_0 + \Sigma B_{p_1} \cos p_1\zeta + \Sigma A_{p_1} \sin. p_1\zeta.$$

Multiplions ses deux membres par cos. $p\zeta$, on aura :

$$\cos. p\zeta f(\zeta) = B_0 \cos. p\zeta + \tfrac{1}{2}\Sigma B_{p_1}[\cos.(p_1+p)\zeta + \cos.(p_1-p)\zeta] + \tfrac{1}{2}\Sigma A_{p_1}[\sin.(p_1+p)\zeta + \sin.(p_1-p)\zeta].$$

Faisons y maintenant successivement :

$$\zeta = \frac{2\pi}{p+q}, \quad \zeta = \frac{4\pi}{p+q} \dots \zeta = \frac{2(p+q-1)\pi}{p+q}$$

et ajoutons les résultats, nous verrons que tous les coefficients de B_1, B_2, B_3 .... B_{p-1} deviennent nuls, excepté celui de B_p, qui est égal à $p+q$. En négligeant les termes d'ordre q, on aura donc

$$B_p = \frac{2}{p+q} \Sigma_0^{p+q} f\left(\frac{2\mu\pi}{p+q}\right) \cos. \frac{2\mu p\pi}{p+q};$$

et semblablement

$$A_p = \frac{2}{p+q} \Sigma_0^{p+q} f\left(\frac{2\mu\pi}{p+q}\right) \sin. \frac{2\mu p\pi}{p+q}.$$

La convergence des séries, au moyen desquelles se laisse exprimer la fonction R dans la théorie des planètes, permet de négliger les termes des six, sept,.... dixième ordre, et dès lors de prendre le diviseur de la circonférence q, égal seulement à 8 ou 16, à cause de l'avantage d'employer comme tel un multiple de 4. Le calcul de l'expression générale de R s'effectuera donc aisément par ces formules, ainsi que celui des dérivées de cette fonction, qui entrent dans les formules des variations des éléments. Ce n'est que lorsqu'on les a obtenues, qu'on intègre pour avoir les valeurs troublées des éléments eux-mêmes.

Ce que l'on fait ainsi, dans la théorie des planètes par rapport aux dérivées des perturbations, ne pourrait-on pas le faire pour les Comètes par rapport aux perturbations elles-mêmes? C'est là la question qui nous paraît devoir être résolue par l'affirmative (pour la partie du moins qui dépend de la première puissance des masses), et que nous essaierons de développer

ici. Au lieu d'avoir, comme dans l'exemple qui précède, à calculer l'expression générale de la force perturbatrice au moyen d'un certain nombre de valeurs particulières qu'on en possède, ce sont les coefficients des perturbations absolues que nous déterminerons au moyen de valeurs numériques connues des perturbations relatives (qu'on aurait obtenues par les quadratures), et au moyen de certaines équations de condition.

Supposons donc une Comète périodique, dont on ait observé plusieurs apparitions, et calculé pour chacune d'elles les perturbations relatives, produites par une planète troublante. Désignons par a l'un quelconque des éléments de l'orbite de la Comète, de la variation duquel nous voulons chercher la formule générale, et par t le temps compté à partir de l'un de ses passages au périhélie, du premier par exemple. Appelons aussi ζ' l'anomalie moyenne de la planète perturbatrice, et n' son moyen mouvement. La forme sous laquelle je désire mettre l'altération δa de l'élément considéré, produite par l'action de la planète, est la suivante :

$$\begin{aligned}\delta a = {} & A_1 \sin.\zeta' + B_1 \cos.\zeta' + Kt \\ & + A_2 \sin.2\zeta' + B_2 \cos.2\zeta' \\ & + A_3 \sin.3\zeta' + B_3 \cos.3\zeta' \\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

L'anomalie moyenne ζ' sera l'argument général dont on se servira, A_1, B_1, A_2, B_2 .... et K sont les inconnues du problème, qu'il s'agit de déterminer.

Soit θ l'intervalle qui sépare deux passages consécutifs au périhélie. Représentons par $P + \delta a_1$, $P + \delta a_2$, $P + \delta a_3$, etc., les perturbations absolues de l'élément a pour les différentes périodes, δa_1, δa_2, δa_3.... étant ses perturbations relatives, calculées par les procédés ordinaires, depuis le premier jusqu'au second passage, depuis le second jusqu'au troisième, et ainsi de suite. On aura les équations :

$$(y)\quad \begin{aligned}& A_1 \sin.\zeta' + B_1 \cos.\zeta' + A_2 \sin.2\zeta' + B_2 \cos.2\zeta' + \text{etc.} = P, \\ & A_1 \sin.(\zeta' + n'\theta) + B_1 \cos.(\zeta' + n'\theta) + A_2 \sin.(2\zeta' + 2n'\theta) + B_2 \cos.(2\zeta' + 2n'\theta) + \text{etc.} + K\theta = P + \delta a_1, \\ & A_1 \sin.(\zeta' + 2n'\theta) + B_1 \cos.(\zeta' + 2n'\theta) + A_2 \sin.(2\zeta' + 4n'\theta) + B_2 \cos.(2\zeta' + 4n'\theta) + \text{etc.} + 2K\theta = P + \delta a_2, \\ & \text{etc.}\end{aligned}$$

Les inconnues sont toujours K, A_1, B_1, A_2, B_2, etc., et en outre P,

perturbation absolue de l'élément a de la Comète au premier passage observé. On pourra en déterminer autant qu'on aura d'équations de cette forme, c'est-à-dire autant qu'on aura calculé de séries de perturbations relatives de la Comète.

Pour faire disparaître les deux inconnues K et P, et pouvoir traiter les relations qui précèdent de la manière indiquée, nous les retrancherons membre à membre et deux à deux. Mettant alors les coefficients des inconnues A_1, B_1, A_2, B_2, etc., sous la forme du sinus ou cosinus d'une somme de deux angles, moins le sinus ou cosinus de la différence des mêmes angles, c'est-à-dire posant par exemple le coefficient de A_1,

$$\sin.(\zeta'+n'\theta)-\sin.\zeta'=\sin.\left\{\left(\zeta'+\frac{n'\theta}{2}\right)+\frac{n'\theta}{2}\right\}-\sin.\left\{\left(\zeta'+\frac{n'\theta}{2}\right)-\frac{n'\theta}{2}\right\}$$

puis, développant ces lignes trigonométriques, on obtient :

(5)

$$\begin{aligned}
&A_1\, 2\sin.\frac{n'\theta}{2}\cos.\left(\zeta'+\frac{n'\theta}{2}\right)-B_1\, 2\sin.\frac{n'\theta}{2}\sin.\left(\zeta'+\frac{n'\theta}{2}\right)\\
&+A_2\, 2\sin.n'\theta\cos.(2\zeta'+n'\theta)-B_2\, 2\sin.n'\theta\sin.(2\zeta'+n'\theta)\\
&\qquad\qquad+\text{etc.}\qquad\qquad\qquad\qquad+K\theta=\delta a_1\\
&A_1\, 2\sin.\frac{n'\theta}{2}\cos.\left(\zeta'+\frac{3n'\theta}{2}\right)-B_1\, 2\sin.\frac{n'\theta}{2}\sin.\left(\zeta'+\frac{3n'\theta}{2}\right)\\
&+A_2\, 2\sin.n'\theta\cos.(2\zeta'+3n'\theta)-B_2\, 2\sin.n'\theta\sin.(2\zeta'+3n'\theta)\\
&\qquad\qquad+\text{etc.}\qquad\qquad\qquad\qquad+K\theta=\delta a_2-\delta a_1
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. Retranchant ces nouvelles équations membre à membre, et posant

$$A_1=\frac{-x_1}{4\sin.^2\frac{n'\theta}{2}}\ ,\qquad B_1=\frac{y_1}{4\sin.^2\frac{n'\theta}{2}}$$

$$A_2=\frac{-x_2}{4\sin.^2 n'\theta}\ ,\qquad B_2=\frac{y_2}{4\sin.^2 n'\theta}$$

etc.

On obtiendra, après des transformations analogues aux précédentes, des équations de la forme :

$$x_1 \sin.(\zeta' + n'\theta) + y_1 \cos.(\zeta' + n'\theta)$$
$$+ x_2 \sin.(2\zeta' + 2n'\theta) + y_2 \cos.(2\zeta' + 2n'\theta)$$
$$+ \text{etc.} = \delta a_2 - 2\delta a_1$$

et d'autres semblables. Ces relations en x_1, y_1, x_2, y_2, etc., peuvent être traitées directement par les formules d'interpolation, quel que soit d'ailleurs leur nombre. Dans la pratique, et pour les Comètes, l'application de ces formules se simplifierait beaucoup, en ce qu'il serait suffisant d'avoir les perturbations pour les époques moyennes des retours au périhélie.

Le coefficient K déterminé de la manière indiquée, ne le serait peut-être pas suffisamment exactement, puisqu'il se trouve multiplié par le temps et exige par conséquent une plus grande approximation que les autres coefficients. Il sera donc convenable de déterminer à l'avance la valeur de ce coefficient séculaire, et le terme $K\theta$ des équations (3) étant alors connu, on s'arrêtera aux différences premières des équations précédentes.

Aucune Comète périodique ne compte jusqu'ici un nombre suffisant d'apparitions, pour que nous ayons pu essayer de lui appliquer ce genre de calcul. On pourrait, il est vrai, calculer à l'avance les perturbations relatives, par le moyen ordinaire, pour des révolutions futures, et s'en servir ensuite comme de quantités données pour l'interpolation. Mais le temps nous ayant manqué pour entreprendre un semblable travail, nous nous bornons à indiquer aujourd'hui le principe de ce procédé, quitte à reprendre plus tard ce sujet avec plus d'étendue. Quoique ne pouvant s'appliquer qu'à un nombre de cas restreint, et n'étant praticable qu'au bout de calculs préliminaires par la voie ordinaire et lente des quadratures mécaniques, nous croyons cette méthode générale et susceptible de résoudre d'une manière satisfaisante le problème des perturbations absolues des Comètes.

NOTES.

NOTE I.

Altération du demi-grand axe de l'orbite d'une Comète troublée, dans son mouvement autour du Soleil, par l'attraction d'une planète, qui est censée agir sur elle suivant deux forces rectangulaires, situées dans le plan de l'orbite de la Comète : l'une φ dirigée suivant le rayon vecteur, l'autre π perpendiculaire à cette direction (p. 12).

On sait (*Méc. Cél.*, t. I, p. 190) que V étant la vitesse d'un corps circulant autour du Soleil, r son rayon vecteur, a le demi-grand axe de son orbite, et μ la masse du Soleil qu'on peut prendre pour unité, l'on a

$$(a) \qquad V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Si l'on admet $a = 1$, on pourra supposer que, par l'attraction de la planète, a devienne $1 + \chi$; d'où l'équation précédente donnera, à cause de $\frac{1}{a} = \frac{1}{1+\chi} = 1 - \chi$,

$$\chi = d\left\{V^2 - \frac{2}{r} + 1\right\} = 2VdV + \frac{2dr}{r^2}.$$

Mais, de même que a est devenu $1 + \chi$, il faut admettre que r deviendra $\frac{r}{1-\xi}$ et V^2 devra se représenter par $V^2(1+\lambda)$.

L'équation (a) s'écrira maintenant ainsi :

$$V^2(1+\lambda) = \frac{2(1-\xi)}{r} - 1 + \chi$$

et remplaçant V^2 par sa valeur elliptique (a), on en déduira

$$\chi = \frac{2-r}{r}\,\lambda + \frac{2\xi}{r}.$$

C'est dans cette équation rigoureuse, qu'il faut maintenant introduire les forces perturbatrices φ et π.

Si nous avions rapporté les mouvements de la Comète à deux axes rectangulaires, se croisant au centre du Soleil, et dont l'un, celui des x, coïncidât avec le grand axe de l'orbite, nous aurions eu pour les équations de son mouvement troublé dans le plan de l'orbite :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} = \text{X}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3} = \text{Y};$$

en supposant la masse du Soleil égale à l'unité, et que les forces rectangulaires X et Y tendent à faire *croître* les coordonnées qui leur correspondent. Multipliant la première par dx, la seconde par dy, et additionnant, on obtient

$$\frac{d^2xdx + d^2ydy}{dt^2} + \frac{xdx + ydy}{r^3} = \text{X}dx + \text{Y}dy,$$

ou

$$(b) \qquad \text{V}d\text{V} + \frac{dr}{r^2} = \text{X}dx + \text{Y}dy.$$

Mais en nommant v l'anomalie vraie, ou l'angle formé par le rayon vecteur avec l'axe des x, et admettant que la force φ, qui agit selon le rayon vecteur, tend à *diminuer* ce rayon, il est clair qu'on aura

$$\text{X} = -\varphi \cos. v - \pi \sin. v,$$

$$\text{Y} = \pi \cos. v - \varphi \sin. v,$$

et on obtient, en remplaçant ces valeurs dans l'équation (b) :

$$\text{V}d\text{V} + \frac{dr}{r^2} = -\varphi(\cos. vdx + \sin. vdy) + \pi(\cos. vdy - \sin. vdx),$$

ou

$$(c) \qquad \text{V}d\text{V} + \frac{dr}{r^2} = -\varphi dr + \pi r dv.$$

Maintenant, au lieu de l'anomalie vraie v, employons avec Clairaut l'anomalie excentrique x : on aura par les équations :

$$r = 1 - e\cos. x \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}v = \text{arc.}\left\{\text{tang.} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}x\right\},$$

$$dr = e\sin. x dx, \quad \tfrac{1}{2}dv = \frac{\tfrac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\,dx}{1 - e\cos. x},$$

ou

$$dr = dx.e\sin. x, \quad rdv = dx\sqrt{1-e^2}.$$

Nous pouvons donc remplacer l'équation (c) par celle-ci :

$$\text{V}d\text{V} + \frac{dr}{r^2} = -\varphi.e\sin. x.dx + \pi dx\sqrt{1-e^2},$$

et si nous l'intégrons, ce qui donne

$$V^2 - \left(\frac{2}{r} - 1\right) = -2e\int \varphi\, dx \sin. x + 2\sqrt{1-e^2}\int \pi\, dx,$$

il faudra remplacer V^2 par sa valeur $\left(\frac{2}{r} - 1\right)(1+\lambda)$, et $\frac{1}{r}$ par $\frac{1-\xi}{r}$.

On tire de là, par ces substitutions,

$$\lambda = -\frac{2\xi}{2-r} - \frac{2r.e}{2-r}\int \varphi \sin. x dx + \frac{2r\sqrt{1-e^2}}{2-r}\int \pi\, dx;$$

et si l'on remplace dans la valeur de χ, λ par la valeur précédente, on trouve

$$\chi = 2\sqrt{1-e^2}\int \pi dx - 2e\int \varphi \sin. x. dx,$$

expression cherchée de l'altération du demi-grand axe.

NOTE II.

Origine et intégration de l'équation différentielle du mouvement elliptique p. 29 :

$$(A) \qquad \frac{rdr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}} = \sqrt{2(1+m)}\, dt.$$

Si on multiplie la première des équations (1) du mouvement elliptique (p. 22) par $2dx$, la seconde par $2dy$, la troisième par $2dz$, qu'on intègre et qu'on additionne, on obtient l'intégrale première des forces vives

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - 2(1+m)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) = 0,$$

ou a est une constante arbitraire.

Multipliant ensuite les mêmes équations par x, y, z et ajoutant à leur somme l'équation précédente, on a, à cause de $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$\frac{d^2.r^2}{2dt^2} - (1+m)\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{a}\right) = 0;$$

équation, qui étant multipliée par $d.r^2$ et intégrée, donne

$$\left(\frac{d.r^2}{2.dt}\right)^2 = 2(1+m)\left(r - \frac{r^2}{a} - h\right) = 0,$$

h étant une nouvelle constante arbitraire. Cette dernière équation peut s'écrire :

$$dt\sqrt{2(1+m)}=\frac{rdr}{\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}};$$

c'est la relation qu'il s'agit d'intégrer.

En vertu de sa première forme (si je pose $\sqrt{2(1+m)}=k$), j'aurai

$$r\frac{dr}{dt}=k\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h};$$

on devra supposer que le signe du radical soit celui de $\frac{dr}{dt}$, c'est-à-dire positif quand r croît avec le temps t, ou que l'astre se meut du périhélie à l'aphélie, et négatif dans la seconde partie de sa révolution. De la sorte, l'intégrale

$$kt=\int\frac{rdr}{\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}},$$

qu'il s'agit d'estimer, aura toujours tous ses éléments positifs; la valeur de r croîtra et décroîtra alternativement, en passant de l'une à l'autre des valeurs extrêmes

$$r=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2-4ah}{4}},$$

qui annulent le radical. Ce dernier prend pour $r=\frac{a}{2}$ sa valeur *maximum* (abstraction faite du signe), qui est $\sqrt{\frac{a}{4}-h}$.

Cela posé, effectuons l'intégration. En posant $r=x+\frac{a}{2}$, notre intégrale devient

$$\int\frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)dx}{\sqrt{\frac{a}{4}-h-\frac{x^2}{a}}}=\int\frac{xdx}{\sqrt{\frac{a}{4}-h-\frac{x^2}{a}}}+\frac{a}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{a}{4}-h-\frac{x^2}{a}}}$$

$$=-a\sqrt{\frac{a}{4}-h-\frac{x^2}{a}}+\frac{a\sqrt{a}}{2}\text{ arc.}\left\{\text{sin.}=\frac{2x}{\sqrt{a(a-4h)}}\right\}+\text{constante},$$

ou

$$(B)\quad \int\frac{rdr}{\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}}=kt=-a\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}+\frac{a\sqrt{a}}{2}\text{ arc.}\left\{\text{sin.}=\frac{2\left(r-\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{a(a-4h)}}\right\}+\text{const.}$$

Le premier terme ainsi intégré est exact, même en tenant compte des changements de signe du radical. Quant au second, en suivant une autre marche, on arriverait à des intégrales de forme différente en apparence, quoique identiques au fond, et nous voyons en effet que ce résultat ne concorde pas avec celui de Lagrange (p. 29). Cela tient à ce que l'expression arc. sin. est ambigüe de sa nature. Généralement, l'intégrale indéfinie $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, qui dans les éléments de calcul intégral est trouvée égale à arc. sin. x + const., peut être également représentée par les huit formes, en apparence différentes :

$$\pm \text{arc. sin.}\, x + C \ ; \quad \pm \text{arc. cos.}\, x + C \ ; \quad \pm \text{arc. sin.} \sqrt{1-x^2} + C$$
$$\text{et} \quad \pm \text{arc. cos.} \sqrt{1-x^2} + C.$$

La première de ces formes, savoir arc. sin. $x + C$ ou $C + z$, en posant arc. sin. $x = z$, est déjà connue.

Faisant $C + \pi = C'$, π étant la demi-circonférence, elle devient $C' - \pi + z$ ou $C' - (\pi - z)$. Or comme sin. $(\pi - z) =$ sin. $z = x$, $\pi - z$ est une des valeurs de arc. sin. x, donc

$$C' - (\pi - z) = C' - \text{arc. sin.}\, x.$$

C'est la seconde des huit formes ci-dessus.

Les deux suivantes se trouveront de même, en remarquant que si $z =$ arc. sin. x, $x =$ sin. $z =$ cos. $\left(\frac{\pi}{2} - z\right) =$ cos. $\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$; de sorte que $\frac{\pi}{2} - z$ et $z - \frac{\pi}{2}$ seront tous deux compris dans l'expression multiforme arc. cos. x, et qu'on pourra remplacer à volonté z par $\frac{\pi}{2} \pm$ arc. cos. x, ce qui ramène l'expression normale arc. sin. x et altère seulement la constante C.

Enfin pour les quatre dernières formes il suffit de remarquer, que si

$$\left.\begin{matrix}\text{sin.}\\ \text{cos.}\end{matrix}\right\} z = x \ , \quad \left.\begin{matrix}\text{cos.}\\ \text{sin.}\end{matrix}\right\} z = \sqrt{1-x^2}$$

et par conséquent :

$$\text{arc.} \left.\begin{matrix}\text{sin.}\\ \text{cos.}\end{matrix}\right\} x = \text{arc.} \left.\begin{matrix}\text{cos.}\\ \text{sin.}\end{matrix}\right\} \sqrt{1-x^2}.$$

Dans tous les cas, chacune des expressions arc. sin., arc. cos. affectée d'un signe quelconque, ne sera pas propre à représenter l'intégrale; mais pour cela, on s'assure en différentiant, que arc. sin. $x = z$ par exemple, doit être choisi de manière que $dz = \frac{d.\text{sin.} z}{\text{cos.}\, z} = \frac{dx}{\text{cos.}\, z}$ soit égal à $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, et pour cela que cos. z et $\sqrt{1-x^2}$ soient égaux et de même signe. Si l'on prenait une autre valeur de arc. sin. x, $\pi - z$ par exemple, alors cos. z étant de signe contraire, on aurait

$$d(\text{arc. sin.}\, x) = - \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{etc.}$$

En choisissant la forme arc. sin. $\sqrt{1-x^2}$, et prenant

$$x = \frac{2\left(r-\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{a^2-4ah}},$$

on a dans le cas actuel

$$\frac{a}{2}\int\frac{dr}{\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{2}\text{arc.}\left\{\text{sin.} = \sqrt{1-\frac{4\left(r-\frac{a}{2}\right)^2}{a^2-4ah}}\right\} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{2}\text{arc.}\left\{\text{sin.} = \frac{\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}}{\sqrt{\frac{a}{4}-h}}\right\} + \text{const.}$$

C'est l'intégrale choisie par Lagrange. Mais ici, comme précédemment, l'expression arc. sin. ne peut représenter un quelconque des arcs dont le sinus est $\dfrac{\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}}{\sqrt{\frac{a}{4}-h}}$, et cela se voit aisément en différentiant. En effet posons

$$u = \text{arc. sin.}\ \frac{2\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}}{\sqrt{a-4h}}, \quad \text{ou} \quad \frac{2\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}}{\sqrt{a-4h}} = \text{sin.}\,u.$$

En différentiant, et remarquant que, dans la formule de Lagrange, $\sqrt{a-4h}$ doit être supposé toujours positif, tandis que $\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}$ suit, quant à son signe, les mêmes phases que $\frac{dr}{dt}$, on trouve

$$\frac{\left(1-\frac{2r}{a}\right)dr}{\sqrt{a-4h}\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}} = \cos.\,udu\,;$$

et pour qu'on ait bien réellement $du = \dfrac{dr}{\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}}$, comme cela doit être, il faut qu'on ait

$$\cos.\,u = \frac{1-\frac{2r}{a}}{\sqrt{a-4h}}.$$

Moyennant cette restriction, l'intégrale se vérifie et la fonction arc. sin. se trouve suffisamment

précisée : l'angle u introduit, coïncidant exactement avec l'angle appelé ordinairement l'anomalie excentrique. Partageons, en effet, la révolution de l'astre, ou simplement les variations de r, en quatre périodes, ayant pour limites les valeurs suivantes de r :

$$\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4ah}\,,\quad \frac{a}{2}\,,\quad \frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4ah}\,,\quad \frac{a}{2}\,,\quad \frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4ah}.$$

Les valeurs

$$\sin.u=\frac{2\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}}{\sqrt{a-4h}},\quad \cos.u=\frac{1-\frac{2r}{a}}{\sqrt{a-4h}},$$

où $\sqrt{a-4h}$ est toujours positif, tandis que $\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}$ est positif pendant les deux premières périodes et négatif dans les deux dernières, ces valeurs, dis-je, présentent les phases de signe correspondantes :

$$\sin.u=+\;+\;-\;-\,,$$
$$\cos.u=+\;-\;-\;+\,.$$

On voit donc que u devra dans la première période être compris entre $2n\pi$ et $2n\pi+\frac{\pi}{2}$, n étant un entier quelconque ; par conséquent il se réduira à $2n\pi$ pour $r=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4ah}$. On voit de même que u croîtra continuellement dans les quatre périodes, d'un angle droit dans chacune d'elles, de façon à devenir égal à $2n\pi+2\pi$ après une révolution complète ; et on en conclut sa parfaite analogie avec l'anomalie excentrique, ce qui permettra de mettre l'équation (A) intégrée

$$(C)\qquad 2t\,\frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^{\frac{3}{2}}}+i=\text{arc.sin.}\,\frac{2\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}}{\sqrt{a-4h}}-\frac{2\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}}{\sqrt{a}},$$

où i est une constante arbitraire, sous la forme

$$kt+i=u-e\sin.u,\qquad \text{en posant}\quad \sqrt{1-\frac{4h}{a}}=e.$$

Si au lieu de l'intégrale (C) de Lagrange, on avait pris le même arc. sin. en signe négatif, on aurait trouvé que cet arc devait être de la forme $(2n+1)\pi$ au périhélie, et décroître constamment. Étant négatif, il aurait donné les mêmes valeurs que de l'autre manière, mais sous une forme moins commode. Il en eût été de même de la forme (B).

NOTE III.

Recherche de l'équation de condition à laquelle doivent satisfaire les sept constantes arbitraires des équations (5), (6) et (7) (page 29).

Les équations (5) et (6) donnent, en mettant p à la place de $2h-r$,

$$x=\frac{gz-cp}{bg-cf}, \quad y=\frac{fz-bp}{cf-bg};$$

d'où

$$r^2=x^2+y^2+z^2=\frac{(gz-cp)^2+(fz-bp)^2}{(bg-cf)^2}+z^2.$$

Posant

$$q=\sqrt{\{(cf-bg)^2+f^2+g^2\}r^2-(1+b^2+c^2)p^2},$$

on obtient, en résolvant l'équation précédente,

$$z=\frac{p(cg+bf)}{g^2+f^2+(bg-cf)^2}\pm\sqrt{\frac{\{r^2(bg-cf)^2-p^2(b^2+c^2)\}\{g^2+f^2+(cf-bg)^2\}+p^2(cg+fb)^2}{\{g^2+f^2+(bg-cf)^2\}^2}},$$

puis, en réduisant et se servant de la valeur de q,

$$z=\frac{p(cg+bf)+q(cf-bg)}{(cf-bg)^2+g^2+f^2}.$$

Il en résulte aussi, en vertu des valeurs de x et de y en z,

$$y=\frac{fq-bp(cf-gb)-pg}{(cf-bg)^2+g^2+f^2},$$

$$x=\frac{\{f+c(cf-bg)\}p-gq}{(cf-bg)^2+g^2+f^2}.$$

Ces trois relations donnent x, y et z en fonctions de r, qui est contenu dans les variables p et q. Servons-nous de ces nouvelles valeurs pour les remplacer dans l'équation

$$dx^2+dy^2+dz^2=\frac{r-\frac{r^2}{a}}{r-\frac{r^2}{a}-h}\,dr^2,$$

qui se déduit de celle des forces vives d'après la note II. Différentiant les valeurs de x, y, z et ajoutant les carrés, les doubles produits s'annullent entre eux et on obtient :

$$dx^2+dy^2+dz^2=\frac{\{f+c(cf-bg)\}^2dp^2+g^2dq^2+\{g-b(cf-bg)\}^2dp^2+f^2dq^2+(fb+cg)^2dp^2+(cf-bg)^2dq^2}{\{(cf-bg)^2+g^2+f^2\}^2};$$

ce qui se réduit à

$$dx^2+dy^2+dz^2=\frac{(1+b^2+c^2)\,dp^2+dq^2}{(cf-bg)^2+g^2+f^2}.$$

Il faudra donc que

$$\frac{(1+b^2+c^2)\,dp^2+dq^2}{(cf-bg)^2+g^2+f^2}=\frac{r-\frac{r^2}{a}}{r-\frac{r^2}{a}-h}\,dr^2.$$

C'est de cette équation que doit résulter la relation cherchée. Remplaçons dans le premier membre p et q par leurs valeurs en r, et posons pour abréger

$$(1+b^2+c^2)=\lambda \quad \text{et} \quad (cf-bg)^2+f^2+g^2=k,$$

notre expression devient :

$$\frac{\lambda\,dp^2+dq^2}{k}.$$

Nous avons, à cause de $p=2h-r$,

$$dp=-dr \quad \text{et} \quad dp^2=dr^2,$$

et en vertu de la valeur de $q=\sqrt{kr^2-\lambda p^2}$,

$$dq=\frac{krdr-\lambda pdp}{\sqrt{kr^2-\lambda p^2}}=\frac{kr+2h\lambda-\lambda r}{\sqrt{kr^2-\lambda p^2}}\,dr,$$

et

$$dq^2=\frac{k^2r^2+4h^2\lambda^2+\lambda^2r^2+4kh\lambda r-2\lambda kr^2-4\lambda^2hr}{kr^2-4h^2\lambda+4\lambda hr-\lambda r^2}\,dr^2.$$

Substituant cette valeur dans le premier membre de notre équation, il devient

$$\frac{\lambda dr^2}{k}+\frac{kr^2+4\lambda^2h^2+\lambda^2r^2+4k\lambda hr-2\lambda kr^2-4\lambda^2hr}{k(kr^2-4h^2\lambda+4\lambda hr-\lambda r^2)}\,dr^2;$$

ou réduisant au même dénominateur et effaçant les termes qui se détruisent,

$$\frac{k^2r^2-k\lambda r^2+4k\lambda hr}{k(kr^2-4h^2\lambda+4\lambda hr-\lambda r^2)}\,dr^2.$$

C'est cette expression que nous égalerons au second membre de l'équation. Le facteur dr^2 disparait, et si nous ajoutons et retranchons au premier membre $4k\lambda h^2$ divisé par le dénominateur, et au second, h divisé aussi par son dénominateur, nous obtenons

$$\frac{4k\lambda h^2}{k^2r^2-4kh^2\lambda+4\lambda khr-k\lambda r^2}=\frac{ah}{ar-r^2-ah}.$$

Chassant les dénominateurs, il ne reste que des termes en r^2 :

$$4k\lambda hr^2 = a(k\lambda - k^2)r^2,$$

d'où nous tirons

$$1 - \frac{k}{\lambda} = \frac{4h}{a};$$

et rétablissant les anciennes notations :

$$1 - \frac{(cf - bg)^2 + g^2 + f^2}{1 + b^2 + c^2} = \frac{4h}{a},$$

équation cherchée.

NOTE IV.

Formules qui donnent la variation de l'époque de l'anomalie moyenne et du moyen mouvement, dans l'orbite troublée de la Comète (page 35).

On a obtenu dans le mouvement elliptique (p. 29 et note II) l'équation :

$$\iota = -2t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} + \text{arc.}\left(\sin. = \frac{2\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{a - 4h}}\right) - \frac{2\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{a}},$$

dans laquelle ι, constante arbitraire (p. 32), représente l'époque de l'anomalie moyenne. Si (p. 35) nous posons

$$\frac{r}{a} = v, \quad \frac{h}{a} = n \text{ et } \frac{2\sqrt{v - v^2 - n}}{\sqrt{1 - 4n}} = \text{V},$$

elle devient

$$\iota = -2t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} + \text{arc. sin. V} - \text{V}\sqrt{1 - 4n}.$$

Différentiant cette valeur par rapport à la caractéristique δ, elle donne

$$\delta\iota = 3t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^5}}\,\delta a + \frac{\delta\text{V}}{\sqrt{1 - \text{V}^2}} - \sqrt{1 - 4n}.\delta\text{V} - \text{V}\delta(\sqrt{1 - 4n}).$$

Or on a

$$\sqrt{1 - \text{V}^2} = \frac{1 - 2v}{\sqrt{1 - 4n}},$$

et

$$\delta\text{V} = \frac{1 - 2v}{\sqrt{v - v^2 - n}\sqrt{1 - 4n}}\left\{\delta v - \frac{1 - 2v}{1 - 4n}\,\delta n\right\},$$

ce qui donne après réduction :

$$\delta i = 3t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^5}}\,\delta a + \frac{2v\delta v + \frac{2(v-2n)\delta n}{1-4n}}{\sqrt{v-v^2-n}};$$

où l'on remettra pour v et n, $\frac{r}{a}$ et $\frac{h}{a}$, et pour δv et δn, $\frac{a\delta r - r\delta a}{a^2}$ et $\frac{a\delta h - h\delta a}{a^2}$.

Le radical du dénominateur de cette expression devenant nul aux deux apsides, comme δi ne peut être infini, il faut que le numérateur soit nul aussi. La formule sera donc en défaut pour ces deux points, et il faudra la transformer de manière qu'il n'y ait aucune fonction des variables au dénominateur. Pour cela, je remarque que

$$\frac{\delta . V}{\sqrt{1-V^2}} = \sqrt{1-V^2}\,\delta V - V\delta . \sqrt{1-V^2},$$

d'où

$$\delta i = \frac{3t\sqrt{2(1+m)}}{a^{\frac{5}{2}}}\,\delta a + (\sqrt{1-V^2}-\sqrt{1-4n})\delta V - V.\delta(\sqrt{1-V^2}-\sqrt{1-4n}):$$

ayant en outre (note III):

$$q = 2\sqrt{h(1+b^2+c^2)}\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h} \quad \text{et} \quad p = 2h - r,$$

on obtient

$$\delta i = \frac{3t\sqrt{2(1+m)}}{\sqrt{a^5}}\,\delta a + \frac{2p}{a\sqrt{1-4n}}\,\delta . \frac{q}{a\sqrt{1-4n}\sqrt{n(1+b^2+c^2)}}$$
$$- \frac{q}{a\sqrt{1-4n}\sqrt{n(1+b^2+c^2)}}\left\{\delta . \frac{2p}{a\sqrt{1-4n}} + 2.\delta\sqrt{1-4n.}\right\};$$

ou, parce que la différentiation de $a\sqrt{1-4n}$ fait disparaître certains termes;

$$\delta i = 3t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^5}}\,\delta a + \frac{2p}{a^2(1-4n)}\left\{\delta . \frac{q}{\sqrt{n(1+b^2+c^2)}} - \frac{q}{\sqrt{n(1+b^2+c^2)}}(\delta p - 2a\delta n)\right\}.$$

Or on a (p. 35 et note III)

$$p = fx + gy; \quad q = \{f + c(cf - bg)\}y - \{g - b(cf - bg)\}x;$$

donc, substituant ces valeurs, on aura pour δi une expression toute rationnelle et entière, et qui ne sera par conséquent sujette à aucun inconvénient.

On aura de cette manière un moyen sûr de calculer $i + \delta i$, époque de l'anomalie moyenne dans l'orbite troublée, en sorte qu'ajoutant à cette époque le mouvement moyen pendant le temps t dans une orbite dont le grand axe serait $a + \delta a$, on aura l'anomalie moyenne qui servira à calculer le lieu de la Comète dans l'orbite troublée. Ainsi

$$\theta = 2t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} + i,$$

étant l'anomalie moyenne dans l'orbite non altérée, on aura $\theta + \delta\theta$ pour l'anomalie moyenne dans l'orbite troublée, et l'on trouvera la valeur de $\delta\theta$ par la différentiation de l'équation précédente, en y faisant varier a et ι seulement, en sorte qu'on aura

$$\delta\theta = -3t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^5}}\,\delta a + \delta\iota.$$

Comme δa et $\delta\iota$ sont ici des quantités variables, si on différentie à l'ordinaire cette valeur de $\delta\theta$, on aura :

$$d\delta\theta = -3dt\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^5}}\,\delta a - 3t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^5}}\,d\delta a + d\delta\iota,$$

et en substituant pour $d\delta\iota$ sa valeur (p. 43) :

$$d\delta\theta = -3dt\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^5}}\,\delta a - \frac{2r^2 d\delta g}{f\sqrt{a^3 h}} + \frac{3(xf-4h)d\delta f}{2\sqrt{ah^3}}.$$

L'intégrale de cette expression donnera directement la valeur de $\delta\theta$, qui est l'altération de l'anomalie moyenne causée par les perturbations.

NOTE V.

Intégration d'une quelconque des équations (15) (page 41) sous la forme :

$$d\Delta = \frac{\mu\beta}{1+m}\left(V_1 + V_1{}'n + V_1{}''n^2 + \frac{U_1 + U_1{}'n + U_1{}''n^2}{(R_1 + R_1{}'n + R_1{}''n^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dn,$$

entre les limites $n = -1$ et $n = 1$ *(page 48).*

L'intégration de la partie $(V_1 + V_1{}'n + V_1{}''n^2)dn$ n'a aucune difficulté, et l'on trouve sur-le-champ pour l'intégrale totale :

$$2V_1 + \tfrac{2}{3}V_1{}''.$$

Quant à l'autre partie $\dfrac{U_1 + U_1{}'n + U_1{}''n^2)}{(R_1 + R_1{}'n + R_1{}''n^2)^{\frac{3}{2}}}$, elle dépend de la quadrature de l'hyperbole ou du cercle, suivant que $R_1{}''$ est une quantité positive ou négative.

Pour en trouver l'intégrale, on supposera cette différentielle égale à

$$d\,\frac{K + Ln}{\sqrt{R_1 + R_1{}'n + R_1{}''n^2}} + \frac{Mdn}{\sqrt{R_1 + R_1{}'n + R_1{}''n^2}},$$

ou il faut que

$$K = \frac{\frac{1}{2}U_1 R_1' - U_1' R_1 + \frac{U_1'' R_1 R_1'}{2R_1''}}{R_1 R_1'' - \frac{1}{4} R_1'^2},$$

$$L = \frac{U_1 R_1'' - \frac{1}{2}U_1' R_1' - U''\left(R_1 - \frac{R_1'^2}{2R_1''}\right)}{R_1 R_1'' - \frac{1}{4} R_1'^2},$$

$$M = \frac{U_1''}{R_1''}.$$

Or l'intégrale de la première partie est évidemment

$$\frac{K + Ln}{\sqrt{R_1 + R_1' n + R_1'' n^2}};$$

celle de la seconde est, en faisant pour abréger $N = \frac{\sqrt{R_1 + R_1' n + R_1'' n^2}}{\frac{1}{2}R_1' + R_1'' n}$,

$$\frac{M}{2\sqrt{R_1''}} \log. \frac{1 + N\sqrt{R_1''}}{1 - N\sqrt{R_1''}},$$

si R_1'' est positif; mais si R_1'' est négatif, cette intégrale devient

$$\frac{M}{2\sqrt{-R_1''}} \text{arc. tang. } N\sqrt{-R_1''}.$$

On fera maintenant dans ces formules $n = 1$ et $n = -1$, et on retranchera la seconde valeur de la première pour avoir l'intégrale complète. Or en faisant $n = 1$, la quantité sous le radical devient $R_1 + R_1' + R_1'' = R_2$, et en faisant $n = -1$, elle devient $R_1 - R_1' + R_1'' = R_0$. Donc la valeur complète de l'intégrale de la différentielle donnée sera représentée, en faisant, si R_1'' est positif,

$$P = \log. \frac{\frac{1}{2}R_1' + R_1'' + \sqrt{R_2 R_1''}}{\frac{1}{2}R_1' + R_1'' - \sqrt{R_2 R_1''}} - \log. \frac{\frac{1}{2}R_1' + R_1'' + \sqrt{R_0 R_1''}}{\frac{1}{2}R_1' + R_1'' - \sqrt{R_0 R_1''}},$$

et si R_1'' est négatif,

$$P = \text{arc. tang. } \frac{\sqrt{-R_2 R_1''}}{\frac{1}{2}R_1 + R_1''} - \text{arc. tang. } \frac{\sqrt{-R_0 R_1''}}{\frac{1}{2}R_1 + R_1''},$$

par

$$\frac{K + L}{\sqrt{R_2}} - \frac{K - L}{\sqrt{R_0}} + \frac{M}{2\sqrt{\pm R_1''}} P.$$

On aura donc enfin, aux quantités près des ordres de $\mu\gamma^3$ et $\mu\beta^3$,

$$\Delta_1 - \Delta_0 = \frac{\mu\beta}{1+m}\left\{2V_1 + \tfrac{2}{3}V_1'' + \frac{K + L}{\sqrt{R_2}} - \frac{K - L}{\sqrt{R_0}} + \frac{MP}{2\sqrt{\pm R_1''}}\right\}.$$

Il n'y a que deux cas où cette formule ne peut pas servir, l'un est celui où $R_1'' = 0$, et l'autre celui où $R_1 R_1'' - \frac{1}{4} R_1'^2 = 0$.

Soit 1° : $R_1'' = 0$. On aura alors à intégrer, comme seconde partie de $d\Delta$, la différentielle

$$\frac{U_1 + U_1' n + U_1'' n^2}{R_1 + R_1' n} dn.$$

Si on suppose son intégrale de la forme

$$\frac{K + Ln + Mn^2}{\sqrt{R_1 + R_1' n}},$$

on trouvera, par la différentiation et la comparaison des termes,

$$K = -\frac{2U_1}{R_1'} + \frac{4U_1' R_1}{R_1'^2} - \frac{16 U_1'' R_1^2}{3R_1'^2},$$

$$L = \frac{2U_1}{R_1'} - \frac{8U_1'' R_1}{3R_1'^2},$$

$$M = \frac{2U_1''}{3R_1'}.$$

Complétant donc cette intégrale de la manière indiquée, on aura à la place de l'équation précédente :

$$\Delta_2 - \Delta_0 = \frac{\mu\beta}{1+m}\left\{2V_1 + \tfrac{2}{3}V_1'' + \frac{K+L+M}{\sqrt{R_2}} - \frac{K-L+M}{\sqrt{R_0}}\right\}.$$

Soit 2° : $R_1 R_1'' - \frac{1}{4} R_1'^2 = 0$. Dans ce cas la quantité $R_1 + R_1' n + R_1'' n^2$ deviendra $\frac{(R_1 + \frac{1}{2} R_1' n)^2}{R_1}$ et on aura à intégrer cette différentielle rationnelle $\frac{U_1 + U_1' n + U_1'' n^2) R^{\frac{3}{2}}}{(R_1 + \frac{1}{2} R_1' n)^3} dn,$

qu'on supposera égale à

$$R_1^{\frac{3}{2}}\left\{d\frac{K + Ln}{(R_1 + \frac{1}{2}R_1' n)^2} + \frac{Mdn}{(R_1 + \frac{1}{2}R_1' n)}\right\},$$

ce qui donnera, en réduisant au même dénominateur et comparant les termes,

$$K = -\frac{U_1}{R_1'} - \frac{2U_1 R_1}{R_1'^3} + \frac{12 U_1''^2 R_1}{R_1'^2},$$

$$L = -\frac{2U_1'}{R_1'} + \frac{8U_1'' R_1}{R_1'^2},$$

$$M = \frac{4U_1''}{R_1'^2}.$$

Intégrant donc, et complétant duement l'intégrale, on trouvera pour le cas dont il s'agit l'équation :

$$\Delta_2 - \Delta_0 = \frac{\mu\beta}{1+m}\left\{2V_1 + \tfrac{2}{3}V_1'' + \left(\frac{K+L}{R_2} - \frac{K-L}{R_0}\right)\sqrt{R_1} + \frac{MR_1^{\frac{3}{2}}}{R_1'}\log.\frac{R_2}{R_0}\right\}.$$

NOTE VI.

Manière d'obtenir les deux équations différentielles (page 58) :

$$dh = dx\left(x\frac{dR}{dy} - y\frac{dR}{dx}\right) + (xdy - ydx)\frac{dR}{dx},$$

$$dl = dy\left(y\frac{dR}{dx} - x\frac{dR}{dy}\right) + (ydx - xdy)\frac{dR}{dy},$$

au moyen des trois équations du mouvement troublé d'un corps céleste :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} + \frac{dR}{dx} = 0 \quad \text{etc.}$$

L'équation des forces vives, tirée des équations du mouvement elliptique, où $R=0$, donne (note II):

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \mu\left\{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right\},$$

μ représentant $(1+m)$. D'autre part, si je multiplie respectivement par x, y et z les trois mêmes équations et que j'additionne, j'obtiens

$$\frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{dt^2} = -\frac{\mu}{r}.$$

Or remarquons que

$$d(rdr) = dx^2 + dy^2 + dz^2 + xd^2x + yd^2y + zd^2z:$$

donc, additionnant ces deux relations,

$$\frac{d(rdr)}{dt^2} = \mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

et différentiant

$$\frac{d^2(rdr)}{dt^2} = -\frac{\mu rdr}{r^3} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2(rdr)}{dt^2} + \frac{\mu(rdr)}{r^3} = 0.$$

La quantité (rdr) joue dans cette équation le même rôle que x dans celle du mouvement elliptique

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0.$$

Rapprochons donc ces deux équations, multiplions la première par x, la seconde par (rdr) et soustrayons, nous aurons

$$\frac{xd^2(rdr)}{dt^2} - \frac{(rdr)d^2x}{dt^2} = 0.$$

Intégrant :

$$\frac{xd(rdr) - (rdr)dx}{dt^2} = f;$$

f étant une constante arbitraire. Remplaçons (rdr) et sa différentielle par leurs valeurs, cette relation devient

$$\mu x\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)-\frac{xdx^2}{dt^2}-\frac{ydydx}{dt^2}-\frac{zdzdx}{dt^2}=f,$$

ou

$$x\left\{-\frac{\mu}{r}+\frac{dy^2+dz^2}{dt^2}\right\}-\frac{ydydx}{dt^2}-\frac{zdzdx}{dt^2}=f.$$

En combinant la même équation avec les deux dernières du mouvement elliptique, on obtiendra deux relations semblables en y et en z ; si nous désignons par f' et f'' les deux constantes arbitraires correspondantes, les trois équations formeront le système suivant d'intégrales premières du mouvement elliptique :

$$f+x\left\{\frac{\mu}{r}-\frac{dy^2+dz^2}{dt^2}\right\}+\frac{ydydx}{dt^2}+\frac{zdzdx}{dt^2}=0,$$

$$f'+y\left\{\frac{\mu}{r}-\frac{dx^2+dz^2}{dt^2}\right\}+\frac{xdxdy}{dt^2}+\frac{zdzdy}{dt^2}=0,$$

$$f''+z\left\{\frac{\mu}{r}-\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}\right\}+\frac{xdxdz}{dt^2}+\frac{ydydz}{dt^2}=0.$$

Si on rapporte les positions du mobile à un système de plans coordonnés dont l'un, celui des xy, coïncide avec le plan de la trajectoire, l'ordonnée z sera nulle, la troisième équation disparaîtra et les deux autres se simplifieront. Les constantes f et f' seront égales aux quantités l et h de la page 58 (voy. *Méc. Cél.*, liv. II, p. 167 et 327), et si, après avoir différentié ces deux équations, en n'y faisant varier que les paramètres h et l et les différences dx, dy, dz, on y substitue (ibid., liv. II, n°s 63 et 64), au lieu de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ et $\frac{d^2z}{dt^2}$, les quantités $-\left(\frac{dR}{dx}\right)$, $-\left(\frac{dR}{dy}\right)$ et $-\left(\frac{dR}{dz}\right)$, qui sont les parties de leurs valeurs dues aux forces perturbatrices, on aura les deux relations cherchées :

$$dh=dx\left\{x\frac{dR}{dy}-y\frac{dR}{dx}\right\}+(xdy-ydx)\frac{dR}{dx};$$

$$dl=dy\left\{y\frac{dR}{dx}-x\frac{dR}{dy}\right\}+(ydx-xdy)\frac{dR}{dy}.$$

NOTE VII.

Expression de la différence r^{me} de la fonction y_n en fonction des différences d'un ordre supérieur, des fonctions y_{n-r-1}, y_{n-r-2}, y_{n-r-3}, etc. (*page* 82).

Si l'on renverse l'ordre des équations (D) de la page 79, et qu'on les mette sous la forme :

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + \Delta y_{n-1} \\ \Delta y_{n-1} &= \Delta y_{n-2} + \Delta^2 y_{n-2} \\ \Delta^2 y_{n-2} &= \Delta^2 y_{n-3} + \Delta^3 y_{n-3} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^{n-1} y_1 &= \Delta^{n-1} y_0 + \Delta^n y_0 \end{aligned}$$

la somme de ces équations donne après réduction :

$$y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-2} + \Delta^2 y_{n-3} + \ldots\ldots + \Delta^{n-2} y_1 + \Delta^{n-1} y_0 + \Delta^n y_0.$$

Lorsqu'on veut se borner aux différences de l'ordre m, en supposant $m < n$, on fait $\Delta^{m+1} y = 0$, etc., d'où il suit $\Delta^m y = \Delta^m y_1 = \Delta^m y_2$, etc., et il vient alors :

$$y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-2} + \Delta^2 y_{n-3} + \ldots\ldots + \Delta^{m-1} y_{n-m} + \Delta^m y.$$

Si l'on prend la différence première de cette équation, il viendra

$$(\alpha) \qquad \Delta y_n = \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \text{etc.}$$

Soumettant ce résultat à de nouvelles différentiations, en diminuant chaque fois les indices d'une unité, on aura

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_{n-1} &= \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-4} + \Delta^5 y_{n-5} + \text{etc.} \\ \Delta^3 y_{n-2} &= \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-4} + \Delta^5 y_{n-5} + \text{etc.} \\ \Delta^4 y_{n-3} &= \Delta^4 y_{n-4} + \Delta^5 y_{n-5} + \text{etc.} \\ \Delta^5 y_{n-4} &= \Delta^5 y_{n-5} + \text{etc.} \\ &\text{etc.}; \end{aligned}$$

et prenant la somme de ces équations, en observant que celle de leurs premiers membres est précisément la valeur de $\Delta^2 y_n$, qu'on tirerait de l'équation (α), on obtiendra

$$(\beta) \qquad \Delta^2 y_n = \Delta^2 y_{n-2} + 2\Delta^3 y_{n-3} + 3\Delta^4 y_{n-4} + 4\Delta^5 y_{n-5} + \text{etc.}$$

Différentiant encore cette dernière, en diminuant chaque fois les indices d'une unité, il viendra :

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_{n-1} &= \Delta^3 y_{n-3} + 2\Delta^4 y_{n-4} + 3\Delta^5 y_{n-5} + 4\Delta^6 y_{n-6} + \text{etc.} \\ \Delta^4 y_{n-2} &= \Delta^4 y_{n-4} + 2\Delta^5 y_{n-5} + 3\Delta^6 y_{n-6} + \text{etc.} \\ \Delta^5 y_{n-3} &= \Delta^5 y_{n-5} + 2\Delta^6 y_{n-5} + \text{etc.} \\ \Delta^6 y_{n-4} &= \Delta^6 y_{n-6} + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Ajoutant et observant que la somme des premiers membres est la valeur de $\Delta^3 y_n$ qu'on tirerait de l'équation (α), on trouvera

$$(\gamma) \qquad \Delta^3 y_n = \Delta^3 y_{n-3} + 3\Delta^4 y_{n-4} + 6\Delta^5 y_{n-5} + 10\Delta^6 y_{n-6} + \text{etc.}$$

Les coefficients numériques des équations (α), (β) et (γ) sont les mêmes que ceux des développements de $(1-a)^{-1}$, $(1-a)^{-2}$ et $(1-a)^{-3}$ et la cause de cette identité est aisée à trouver dans l'analogie de leur formation. En effet, on passe d'abord du développement de

$$(1-a)^{-1} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \text{etc.},$$

à celui de

$$(1-a)^{-2} = (1-a)^{-1}(1-a)^{-1} = (1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \text{etc.})\,(1 + a + a^2 + a^3 + \text{etc.})$$
$$\begin{aligned} = 1 + a + a^2 + a^3 &+ \text{etc.} \\ + a + a^2 + a^3 &+ \text{etc.} \\ + a^2 + a^3 &+ \text{etc.} \\ + a^3 &+ \text{etc.} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

résultat d'une forme semblable à la somme des équations qui ont donné l'équation (β); il en sera de même des autres cas.

Les coefficients numériques de l'expression de $\Delta^r y_n$ seront donc les mêmes que ceux du développement de $(1-a)^{-r}$ et l'on posera en conséquence :

$$\Delta^r y_n = \Delta^r y_{n-r} + \frac{r}{1}\Delta^{r+1} y_{n-r-1} + \frac{r(r+1)}{1.2.}\Delta^{r+2} y_{n-r-2}$$
$$+ \frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3.}\Delta^{r+3} y_{n-r-3} + \text{etc.},$$

expression demandée.

TABLE DES MATIÈRES.

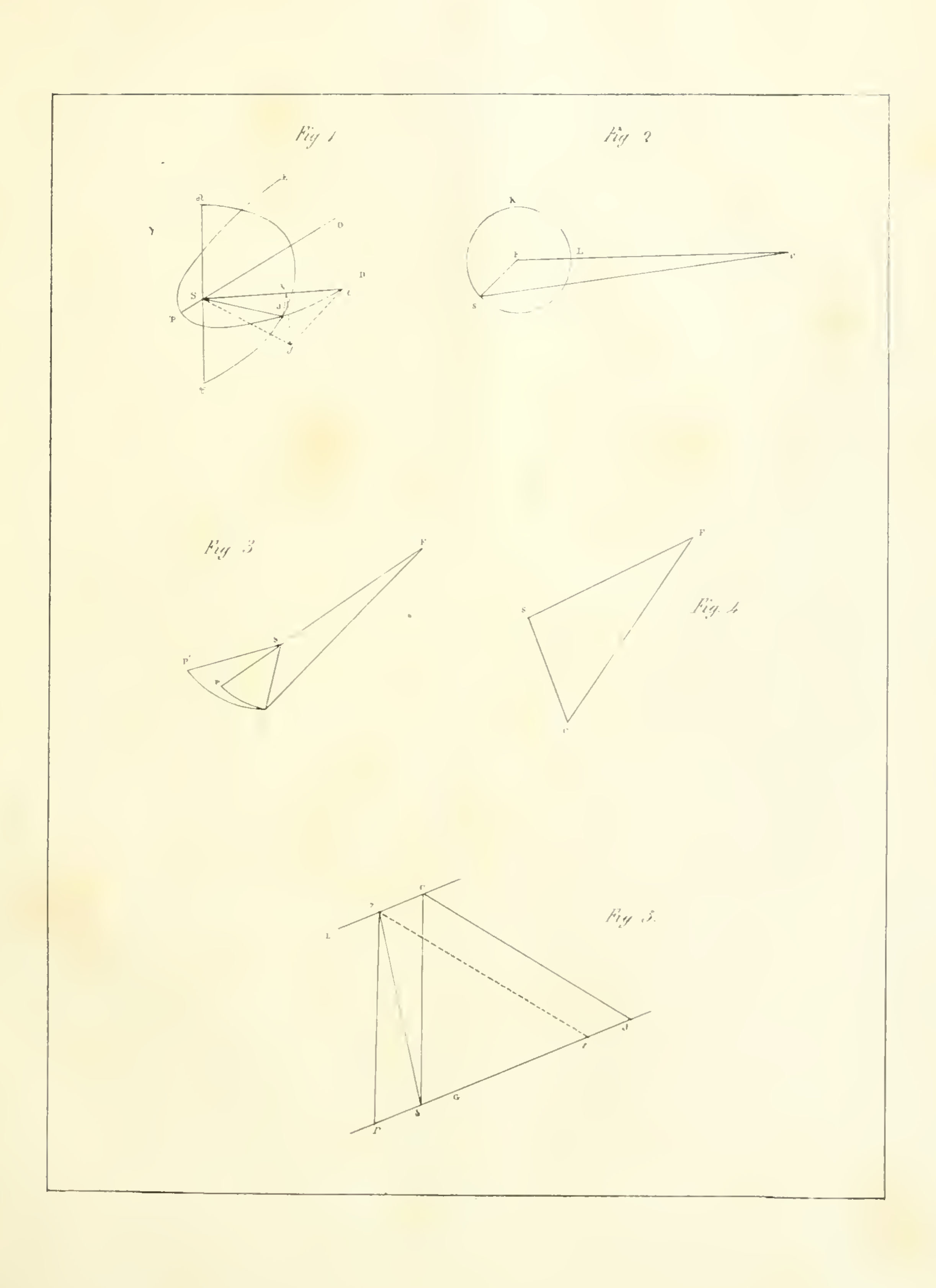


Fig 1
Fig 2
Fig 3
Fig. 4
Fig 5.